小論文

科学的に見た安全性と市民の安心感は必ずしも一致しない．そうした安全と安心の齟齬(そご)に関する具体例を挙げ，その解決策について論ぜよ．（1200 字以内）

1 数学（微分・積分）

1. 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x-3\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{1/x}$

2. 次の重積分について，以下の問に答えなさい．e は自然対数の底（ネイピア数）である．

$$\iint_D y^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D=\left\{(x,y)\;\middle|\;0<x\le y\le 2x,\ 1\le xy\le 4\right\}$$

(1) 積分領域 D を図示しなさい．

(2) 次の変数変換のヤコビアン $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}$ を求めなさい．

$$\begin{cases} s=xy \\ t=\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (x>0,\ y>0)$$

(3) 問 (2) の変数変換によって積分領域 D が (s,t) 平面の領域 $\bar{D}$ へうつされるとする．上記の重積分を領域 $\bar{D}$ での重積分に書きかえなさい．

(4) この重積分を計算しなさい．

3. 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $1-y^2-2xyy'=0$

(2) $x^2y'+y-2xy-x^2=0$

2 数学（線形代数）

1. ω を $\omega^3 = 1$ を満たすある数とするとき，下記の行列式を求めよ．

(1)
$$a = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2)
$$b = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

2. (1) 下記の行列の階数を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) ある定数 a を含む下記の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

3. 以下の行列に対する以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．ただし，n は任意の自然数とする．

3 数学（確率・統計）

1. ある豆の重さ (グラム) は正規分布に従う. 7 個のサンプルの重さは, 13, 11, 10, 9, 8, 7, 5 であった. 以下の問に答えよ.
   (1) 標本平均と標本分散を求めよ.
   (2) 母平均は 10.5 であるという帰無仮説と母平均は 10.5 ではないという対立仮説に対し, 有意水準 10%の両側検定を行なえ. ただし, 自由度 6 の t 分布の分布関数 $F_6(t)$ について $F_6(1.94)=0.95$ および $F_6(1.44)=0.9$ が成り立つ.

2. あるコインは確率 p $(0<p<1)$ で表が, 確率 $1-p$ で裏が出る. 以下の問に答えよ.
   (1) 表が 2 回出るまでコインを繰り返し投げるとしよう. コインを投げる回数を確率変数 X で表す. 確率 $\Pr(X=n)$ を求めよ. ただし, n は 2 以上の整数である.
   (2) 表が 5 回出るまでコインを繰り返し投げるとしよう. 裏が出る回数を確率変数 Y で表す. 確率 $\Pr(Y=k)$ を求めよ. ただし, k は非負の整数である.

3. X と Y は次の結合密度関数に従って分布する確率変数である.

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy+B & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

   ただし, A と B は定数である. 以下の問に答えよ.
   (1) (A,B) が満たすべき条件を求めよ.
   (2) $(A,B)=(4,0)$ の時, X の周辺密度関数 $g(x)$ を求めよ.
   (3) $(A,B)=(4,0)$ の時, $f\left(x,y\,|\,x\ge \frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

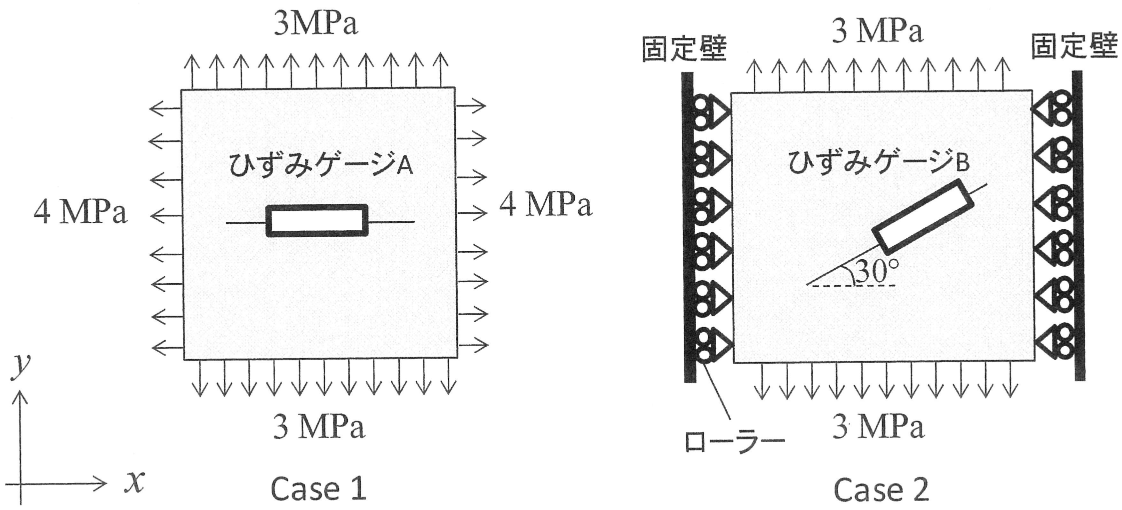
4. ある製品の寿命 X (年) は指数分布に従う. 密度関数は次式で表される.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

   ただし, θ $(\theta>0)$ はパラメータである. 以下の問に答えよ.
   (1) X の期待値 $E[X]$ を求めよ.
   (2) N 個のサンプルの寿命を観測するとしよう. サンプル i $(i=1,\ldots,N)$ の寿命を確率変数 X_i で表す. $\{X_i\}$ が独立に分布する時, θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ.
   (3) $\hat{\theta}$ が不偏推定量であることを示せ.

4 弾性体と構造の力学（1）

下記のような2種類の条件における均質な等方弾性体を考える．Case 2 の条件では，x 方向の変形が拘束されている．



上記の条件で平面応力状態を仮定できるものとし，ひずみと応力の関係が以下のように与えられるとする．

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\sigma_{xy}}{E}$$

ここで，σ_x と σ_y は x と y 方向の垂直応力，σ_{xy} はせん断応力，ε_x と ε_y は x と y 方向のひずみ，γ_{xy} はせん断ひずみ，E はヤング率，ν はポアソン比である．ヤング率は 1000 MPa であり，x 軸に平行に貼ったひずみゲージ A によって計測されたひずみが 0.3%とする．このとき以下の問いに答えよ．

1. この等方弾性体のポアソン比 ν を求めよ．また，Case 1 の条件の y 方向のひずみ ε_y とせん断ひずみ γ_{xy} を求めよ．

2. Case 2 の条件で，正の値で最大値となるせん断応力が作用している面に平行な方向の単位ベクトルを求めよ．

3. ひずみゲージ B によって計測されるひずみを求めよ．

5 弾性体と構造の力学 (2)

1. 図-1 のように点 R にモーメント荷重 M_0 が作用する骨組構造について，以下の問いに答えなさい．ただし，点 Q と部材 QS および QT の両端は摩擦のないヒンジとする．また，はり部材 PR の曲げ剛性は EI，トラス部材 QS および QT の軸剛性は EA であり，解答の数式表現から A を消去するために次の関係式を用いなさい．

$$\frac{EIa}{EA\ell^3} = \frac{1}{2}$$

(a) $M_0 \neq 0$ のとき，トラス部材 QS の軸力を求めなさい．

(b) $M_0 \neq 0$ のとき，はり部材 PR のモーメント図を描きなさい．ただし，P，Q，R の各点での値も明記しなさい．

(c) $M_0 \neq 0$ のとき，R 点のたわみ（すなわち鉛直方向変位）を求めなさい．

(d) 図-1 と同構造について，図-2 のように，$M_0 = 0$ で，P 点が θ_0 時計回りに回転したときのトラス部材 QS の軸力を求めなさい．

(e) 図-1 と同構造について，図-2 のように，$M_0 = 0$ で，P 点が θ_0 時計回りに回転したときのはり部材 PR のモーメント図を描きなさい．ただし，P，Q，R の各点での値も明記しなさい．

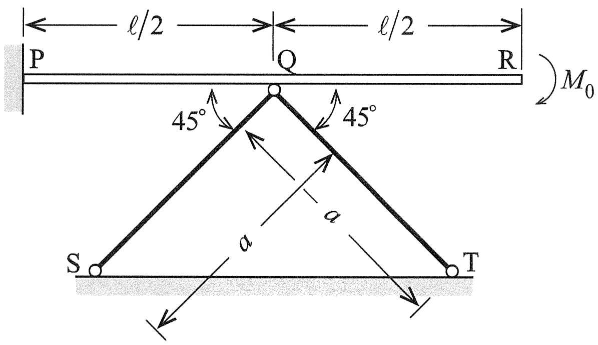


図-1 骨組構造

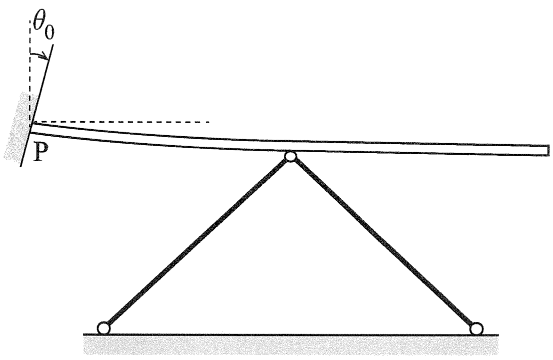


図-2 骨組構造の左端支点が回転する場合

6　地盤とコンクリート (1)

1. 次の記述は，土のダイレイタンシーに関する記述である．(A) ～ (H) にあてはまる語句を示せ．
ダイレイタンシーは，(A) 時に (B) が起こる現象である。緩い砂質土の場合，(A) 変形によって，体積は (C) しようとするのに対し，密な砂質土の場合，体積は (D) しようとする性質がある．体積が収縮しようとする場合には，(E) のダイレイタンシーという．一方，粘性土については，(F) 粘土の場合には，体積が収縮しようとし，(G) 粘土の場合には，体積が膨張しようとする性質がある．したがって，(F) 粘土を非排水せん断すると，(H) が発生する．

2. 図はコンクリート製の重力式擁壁とランキンの主働土圧応力状態，及びモールの応力円を示している．以下の問いに答えよ．
(1) 背後地盤の土の湿潤単位体積重量を求めよ。背後の土の諸元は右表のとおりである．なお，重力加速度は 9.8 m/s^2，水の単位体積重量は 9.8 kN/m^3 とする．

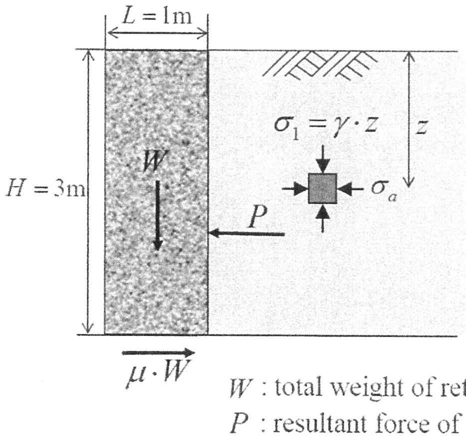
諸元	値
間隙比　(e)	1.0
土粒子の比重　(Gs)	2.5
含水比　(w)	20%

(2) 土のせん断強度がモールクーロンの破壊基準によって表わされるとき，深さ z における主働土圧σ_aが，下記のように表わされることを示せ．

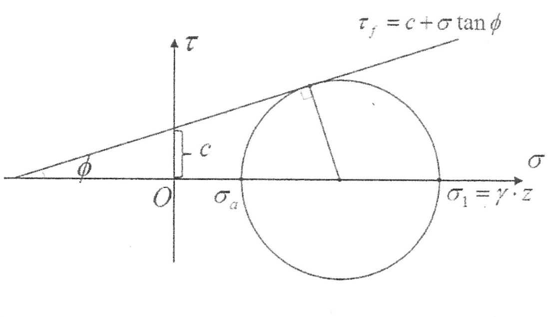
$$\sigma_a = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}\gamma\cdot z - 2c\sqrt{\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}}$$

(3) 粘着力 $c=2\sqrt{3}$ kN/m^2，土の内部摩擦角 $\phi=30°$ の時，擁壁に作用する主働土圧合力 P を求めよ．
(4) 擁壁のすべり安全率および転倒安全率を求めよ．ここに，コンクリートの単位体積重量は 23 kN/m^3，擁壁と底部地盤の摩擦係数は 0.5 とする．

Retaining wall subjected to earth pressure



Mohr's stress circle in the active earth pressure condition in Rankin's theory



W : total weight of retaining wall
P : resultant force of earth pressure
μ : coefficient of friction
γ : total unit weight of soil
c : cohesion
ϕ : angle of internal friction

7 地盤とコンクリート（2）

1. ある設計基準強度・スランプ・空気量を満足するコンクリートを製造するための示方配合の決定手順について，次のキーワードを用いて説明せよ．図を用いて説明をしてもよい．

   キーワード：

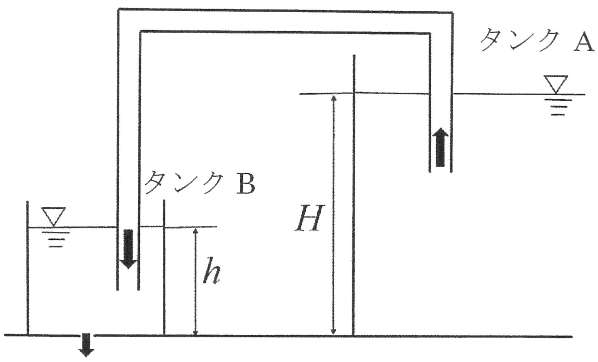
   圧縮強度とセメント水比の関係式
   設計基準強度
   配合強度
   暫定の配合

2. 引張鉄筋のみを有する単鉄筋長方形梁について次の問に答えよ．
   (1) 曲げ破壊時における鉄筋コンクリート断面中の圧縮応力分布の概形を描け．
   (2) 断面の曲げ耐力を算定する際に用いる等価応力ブロックについて説明せよ．

3. 次のコンクリート工学に関する専門用語を説明せよ．
   (1) コールドジョイント
   (2) 塩害
   (3) せん断スパン比
   (4) プレテンション方式とポストテンション方式

8 水理学（1）

図のように二つのタンク A, B をサイフォン（直径 D）でつなぎ，左のタンク B の底の穴（直径 d）から空気中に排水する．タンク A は十分に大きな容積を有し，その水面高さは変化しない．タンク B の水深 h が一定であるとき，二つのタンクの水深比 H/h を求めよ．ただし，各種エネルギー損失を無視できるものとする．



9 水理学 (2)

流水の断面積が変化する直線水路について，以下の問いに答えよ．なお，重力加速度は g としてよい．損失は考えない．

1. 図-1(a) のように，幅が変化するところを流速 v で水が流れている．水路床は水平である．水深を h，水路幅を B として，水面形（水深の変化 dh/dx）を定式化せよ．その上で，次の場合の水面形について，定式化した結果とともに図示せよ．

   (1) 流れが全領域について常流
   (2) 流れが全領域について射流

2. 図-1(b) のように，水路床の高さ s が変化するところを単位幅流量 q の水が流れている．水深を h として，水面形（水深の変化 dh/dx）を定式化せよ．その上で，次の場合の水面形について，定式化した結果とともに図示せよ．

   (1) 流れが全領域について常流
   (2) 流れが全領域について射流
   (3) 上流側で常流，下流側で射流

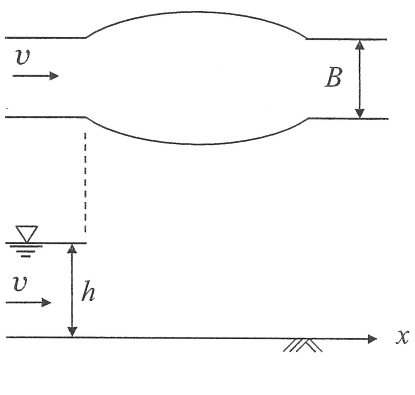


図-1(a)

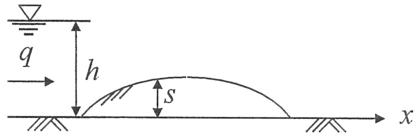
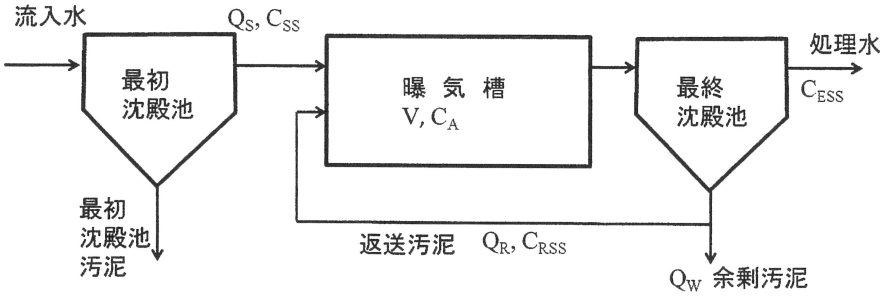


図-1(b)

10 水質と環境（1）

下の図のような最初沈澱池と最終沈澱池，曝気槽からなる廃水処理施設について，曝気槽流入水の流量水量 Q_S，平均 SS 濃度 C_{SS}，曝気槽内水の容積 V，MLSS 濃度 C_A，最終沈澱池の処理水平均 SS 濃度 C_{ESS}，返送汚泥濃度 C_{RSS}，返送汚泥量 Q_R，余剰汚泥量 Q_Wが観測されるとき，以下の各問に答えよ．



(1) 好気性処理が嫌気性処理よりも優れている点をあげよ．

(2) この曝気槽の水理学的滞留時間 HRT を求めよ

(3) 曝気の役割について説明せよ．

(4) この曝気槽内の混合液浮遊物質 MLSS 濃度 C_A を求めよ．

(5) この施設の固形物滞留時間 SRT を C_A を用いて求めよ．

(6) 発生した余剰汚泥は現在，どのような処理がされるか説明せよ．

(7) 廃水中のアンモニアは硝化反応によって亜硝酸，硝酸へと変化する．以下の硝化反応式を完成させよ．

$2NH_4^+ \ + \qquad = 2NO_2^- \ + \qquad +$

$2NO_2^- \ + \qquad = 2NO_3^-$

11 水質と環境（2）

1. 以下の水質指標について簡潔に説明せよ.

(1) 溶存酸素

(2) 懸濁物質

(3) 炭素系 BOD と窒素系 BOD

(4) 微生物に関する指標

2. 上水道におけるオゾンを用いた消毒のメリットとデメリットを述べよ.

$\boxed{12}$ 生物と生態（１）

１．　地球規模のリンの循環に関する以下の問に答えよ．

（１）リンが生物にとって重要な元素である理由を３つ述べよ．

（２）リン鉱石のグアノの生成過程を説明せよ．

（３）リンの循環を説明した次の文章中の $\boxed{\text{a}}$ ～ $\boxed{\text{e}}$ に適切な語句を記せ．解答は日本語でも英語でも良い．

A “typical” phosphorus atom, released from the rock by chemical $\boxed{\text{a}}$, may enter and cycle within the terrestrial community for years, decades, or centuries before it is carried via the $\boxed{\text{b}}$ in to stream. Within a short time of entering the stream (weeks, months, or years), the atom is carried to the ocean. It then makes, on average, about 100 round trips between surface and deep waters, each lasting perhaps 1000 years. During each trip, it is taken up by surface-dwelling $\boxed{\text{c}}$, before eventually settling into the deep again. On average, on its hundredth descent (after 10 million years in the ocean) it fails to be released as $\boxed{\text{d}}$ phosphorus, but instead enters the bottom sediment in particulate form. Perhaps 100 million years later, the $\boxed{\text{e}}$ floor is lifted up by geological activity to become dry land. Thus, our phosphorus atom will eventually find its way back to via a river to the sea, and to its existence of cycle (biotic uptake and decomposition) within cycle (ocean mixing) within cycle (continental uplift and erosion).

出典：COLIN R. TOWNSEND ほか「ESSENTIALS OF ECOLOGY」Blackwell Science

２．　個体群の動態に関する以下の問に答えよ．

（１）個体数 N, 時間 t, 増加率 γ を用いて指数関数的増殖の微分方程式を書け．

（２）（１）の N, t, γ, および環境収容力 K を用いて，ロジスティック増殖の微分方程式を書け．

（３）（１）および（２）の式を，$t=0$ のとき $N=N_0$ として積分して解を求めよ．

（４）横軸を個体数 N，縦軸 $\dfrac{dN}{dt}\left(\dfrac{1}{N}\right)$ をとした平面で，γ 戦略者(γ_1，K_1) および K 戦略者(γ_2，K_2)の概形を示せ．

（５）γ 戦略者および K 戦略者のエネルギー分配（再生産，競争，捕食者からの逃避など）の特徴を説明せよ．

13 生物と生態（2）

1. 微生物による嫌気呼吸に関する以下の問いに答えよ．
   (1) 硝酸塩呼吸において，呼吸鎖複合体における電子伝達の結果 ATP が合成される過程で使用される電子供与体及び最終電子受容体を答えよ．
   (2) 硝酸塩呼吸における代謝産物を３つ挙げよ．

2. 微生物燃料電池では, *Geobacter* 属や *Shewanella* 属などに属するある種の微生物が，無酸素条件下で有機物を分解する際に，電極を最終電子受容体として使用する．この微生物燃料電池が水処理工学分野で注目されている理由を述べよ．

3. 薬剤耐性微生物に関する以下の文章を完成させよ．

   [a] 排水など薬剤濃度が高い環境において生存した薬剤耐性微生物は，下水処理場での生物処理槽において，遺伝的組換えによって薬剤耐性遺伝子を [b] させることが懸念されている．水環境中に放出する前に，排水の消毒を適切に行うことにより薬剤耐性微生物の [c] を十分に減少させることが工学的な対応策の１つとして考えられる．

14 交通 (1)

定常的な交通流を路側に立って3分間観測したところ，下記のような速度分布を得た．
次の問いに答えよ．

速度［km／時］	30	40	50	60
台数	6	4	5	3

1．交通流率［台／時］を求めよ．
2．空間平均速度［km／時］を求めよ．
3．交通密度［台／km］を求めよ．
4．この定常的な交通流を空から撮影したところ，写真には時速30［km／時］で走行している車が，8台写っていた．この写真上に写っている時速60［km／時］で走行している車の台数を求めよ．
5．航空写真は，何キロメートルの範囲を撮影したのか，答えよ．
6．この定常状態の交通流が流れている区間で事故が発生したため，事故地点の交通容量が低下して渋滞が引き起こされた．事故発生後に事故地点より下流の路側で10分間の観測を行ったところ，上流側を時速30［km／時］で走行していた車を10台観測した．事故地点の交通容量を求めよ．ただし，事故地点ではFirst In First Outで車が流れているものとする．
7．事故が起きてから，1時間後に事故地点を通過する車の遅れ時間を求めよ．

15 交通（2）

ある財が地域 i で生産され，その全てが，地域 j へ輸送され，消費される．地域 i, j 間の輸送には道路が利用され，財１単位当り T の輸送費がかかる．その結果，地域 j での財の価格 P_j と地域 i での価格 P_i の間には $P_j = P_i + T$ なる関係が成立する．以上の条件の下で，以下の問いに答えよ．

(1) 地域 i では財１単位の卸売価格が P_i のとき，生産者は $S = 10\ P_i$ 生産する．また，地域 j では財１単位の購入価格が P_j のとき，消費者は $D = 1000 - 10\ P_j$ 消費する．財の需要 D と供給 S が一致（需給均衡）する量を T の関数として表せ．

(2) 財１単位は道路交通量１単位を使って輸送される．道路では混雑が発生するため，財１単位当り輸送費用 T は交通量 x の単調増加関数 $T = (1/20)\,x + 10$ で与えられる．このとき，財の需給が均衡する交通量 x および輸送費用 T を求めよ．

(3) この道路に混雑料金 α が賦課され，輸送費用が $T(x) + \alpha$ で与えられる状況を考える．社会的余剰（すなわち，道路利用者の消費者余剰と料金収入の和）を最大化する料金水準，および，その最適料金下での輸送量 x を求めよ．

(4) 混雑料金を未来永劫にわたって賦課したとする．この課金による年間料金収入を 30 [億円／年]，割引率を 5 [%／年]と仮定し，将来にわたって得られる総料金収入（キャッシュ・フロー流列）の現在価値を求めよ．

(5) この道路が改良され，輸送費用関数 $T(x)$ が，$T = (1/20)\,x + 10$（改良前）から $T = (1/20)\,x + 5$（改良後）に変化した．この道路改良による利用者便益（すなわち，輸送費用が減少したことによる道路利用者の消費者余剰の増分）を求めよ．

16 計画数理 (1)

1. 図 1 で示されるようなフローネットワークにおいて，各リンク ℓ_i $(i = 1,\dots,5)$ に対してフロー容量 $a_i > 0$ が与えられている．これに対して，ノード n_1 を始点，n_4 を終点としたフローをできるだけ多く流すことを考える．このとき，以下の問に答えよ．

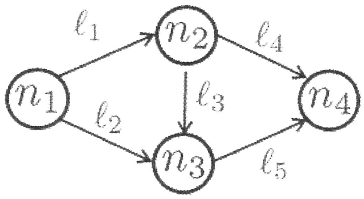


図-1 フローネットワーク

(1) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (7, 3, 2, 4, 6)$ のときの最大フローと最小カットを求めよ．

(2) x_i をリンク ℓ_i $(i = 1,\dots,5)$ に流すフローとし，v をネットワーク全体に流すフローとする．このとき，最大フロー問題は $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_5)^\top$, $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_5)^\top$ を用いて次のような線形計画問題 (P_1) として定式化される．

$$(\mathrm{P}_1)\quad \begin{array}{ll} \displaystyle\max_{x,v} & v \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}v = \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a},\ \ v \ge 0. \end{array}$$

このとき，行列 $\boldsymbol{M}$ とベクトル $\boldsymbol{q}$ の値を記せ．

(3) (P_1) に対する双対問題を書け．ただし，以下の関係を用いてもよい．

$$\left[\ (\mathrm{P})\quad \begin{array}{ll} \displaystyle\max_{x} & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \end{array}\right] \qquad \left[\ (\mathrm{D})\quad \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{y} & \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}. \end{array}\right]$$

(4) 双対問題 (3) は，すべての変数に 0-1 制約を付加することにより，最小カット問題として解釈できる．このとき，各変数の意味を記せ．

2. 次のような最適化問題を考える．

$$(\mathrm{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{x_1,x_2} & \frac{1}{4}(x_1 - 5)^4 + \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_2^2 \le r, \\ & x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{array}$$

このとき，以下の問題に答えよ．

(1) この問題の実行可能領域が空でないことと等価な r に対する条件を示せ．

(2) $r = 25$ とする．このとき，問題 (P_2) の Karush-Kuhn-Tucker 条件を示せ．また，最適解と対応する Lagrange 乗数を求めよ．

(3) 問題 (P_2) の最適解を $\boldsymbol{x}^*(r)$ とする．このとき，任意の $r \ge \bar{r}$ に対して $\boldsymbol{x}^*(r)$ が変化しないような $\bar{r}$ が存在する．そのような $\bar{r}$ の最小値を求めよ．

17 計画数理（2）

1. ある週末に，2 つの団体が同じ観光目的地への旅行を検討している．旅行によって得られる利得は，他の団体の旅行行動に依存する．1 つの団体のみが訪問すれば正の利得 β が得られるが，2 団体が同時に訪問すると混雑により利得は負の値 $-\alpha$ となる．ここで，利得が次の複行列で与えられる非零和ゲームを分析する．

団体 1 \ 団体 2	訪問する	訪問しない
訪問する	$(-\alpha,-\alpha)$	$(\beta,0)$
訪問しない	$(0,\beta)$	$(0,0)$

(1) 純粋戦略におけるすべての Nash 均衡を求めよ．

(2) 団体 i が確率 q_i で訪問を選択し，確率 $(1-q_i)$ で訪問しないことを選択するという混合戦略を考える．団体 1 の期待利得関数を示せ．

(3) 団体 2 の混合戦略 q_2 に対する団体 1 の最適応答対応を求めよ．

(4) このゲームの混合戦略におけるすべての Nash 均衡を求めよ．

2. ある伝染病は，月ごとに，健常者の半数が発病し，発病者の 4 分の 1 は死亡する．k 月後の累積死亡者数，発病者数，健常者数をそれぞれ，d_k, s_k, h_k で表すと，人口の推移は次の差分方程式を持つマルコフ連鎖として表される．

$$\begin{bmatrix} d_{k+1} \\ s_{k+1} \\ h_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ s_k \\ h_k \end{bmatrix}.$$

(1) マルコフ連鎖の推移行列のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) マルコフ連鎖の定常状態を求めよ．

(3) 初期の人口が $\begin{bmatrix} d_0 \\ s_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3968 \\ 128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^6-2^7 \\ 2^6 \end{bmatrix}$ で与えられる時，6 か月後（k=6）における発病者数 s_6 および健常者数 h_6 を計算せよ．