

小論文

情報技術等の発達により，土木工学分野においてもロボットやAIの導入についての議論が活発化している．このような新しい技術が有用であると考えられる局面と，必ずしも有用とは言えないと考えられる局面の両者を具体的に述べよ．また，そのような状況の中で今後の土木技術者に必要とされると考えられる能力について論述せよ．

(1200字以内)

1 数学 (微分・積分)

以下の問いに答えなさい.

1. 次の関数の一階微分 dy/dx を求めよ. ただし, a は定数である.
また, \sinh^{-1} は \sinh の逆関数である. さらに, $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ とせよ.

$$y = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

2. 次の関数の積分 (a), (b) を極座標系で求めなさい.

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(a) $\iint_E f(x, y) dx dy$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$

(b) $\iint_H f(x, y) dx dy$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, 0 \leq x\}$

3. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(2e^{2x}y - 4x)dx + e^{2x}dy = 0$$

2 数学 (線形代数)

1. 次の行列 A について, 以下の問題に答えなさい. ただし, α はある実数である.

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 36 & -12 & 0 \\ -12 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 5\alpha \end{bmatrix}$$

- (a) 行列 A の対角化行列 P と対角化後の行列 B を求めなさい.
- (b) A^n と B^n の関係を示しなさい.
- (c) 行列 B が逆行列を持つ条件を答え, 逆行列 B^{-1} を求めなさい.
- (d) (c) の条件のとき, 行列 A の逆行列 A^{-1} と B^{-1} との関係を示しなさい.
- (e) (c) の条件が満たされないとき, 行列 A の零空間 (核) の次元を答えなさい.
- (f) (c) の条件が満たされないとき, 行列 A の階数 (ランク) を答えなさい.

3 数学 (確率・統計)

1. キャサリンは、ジョン、ポール、ジョージ、リンゴの4人のメンバーが所属する、あるロックバンドのトレーディングカードを購入しようと考えている。各カードにはメンバー1人の顔写真が等確率($=\frac{1}{4}$)で印刷されているが、それらは1枚ずつ封筒に入っており、購入するまではどのメンバーの写真が印刷されているのか分からない。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) 一度に4枚のカードを購入したとする。このとき、メンバー4人の写真がすべて含まれている確率を求めよ。
- (2) 一度に5枚のカードを購入したとする。このとき、メンバー4人の写真がすべて含まれている確率を求めよ。
- (3) キャサリンは1枚ずつカードを購入し、そのたびに中身を確認しながら、4人の写真がすべて揃うまで買い続けることとした。このとき、彼女が最終的に6枚のカードを購入することとなる確率を求めよ。

2. 確率密度分布

$$f(x) = \begin{cases} (p+2q)e^{-(3p+q)x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

に従う母集団から無作為に抽出した n 個の標本の値が $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ であった。ただし、 p, q は確率分布を特徴づける正のパラメータである。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) パラメータ q を p を用いて表せ。
- (2) パラメータ p を最尤推定法を用いて推定せよ。

4 材料力学及び構造力学 (1)

図のような均質な等方線形弾性体の板が平面応力状態にあり，点Pにおける応力テンソルが図1に示す $x-y$ 座標系を参照して次式で与えられている．以下の問いに答えよ．

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

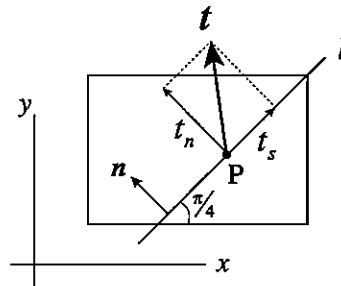


図-1

- 点Pにおける主応力 σ_1 , σ_2 とその主方向の単位ベクトル $n_1 = \begin{Bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{Bmatrix}$, $n_2 = \begin{Bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{Bmatrix}$ を求めよ．
- 点Pを通る x -軸から反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 傾いた直線 l を考える． n を l に立てた外向き単位法線ベクトルとすると，点Pにおいて l に作用する表面力ベクトルを t ，その l に垂直な成分を t_n ， l に沿うせん断成分を t_s とする．成分 t_n と t_s の大きさ（絶対値） $|t_n|$, $|t_s|$ を求めよ．
- 材料のヤング率を $E = 200\text{MPa}$ ，ポアソン比を $\nu = 0.20$ とする．点Pにおけるひずみテンソル $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$ を求めよ．ただし，平面応力状態における等方線形弾性体の構成式は次式のように与えられる．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

ここに， γ_{xy} は工学せん断ひずみである．また， G は E と ν から定まるせん断弾性係数を表す．

- 点Pにおける主ひずみ ε_1 , ε_2 を求めよ．

5 弾性体と構造の力学 (2)

1. 図-1 に示す梁の任意の位置 s に荷重 P が作用する場合を考える。梁の断面は図-2 に示す箱形であり、D 点はヒンジである。

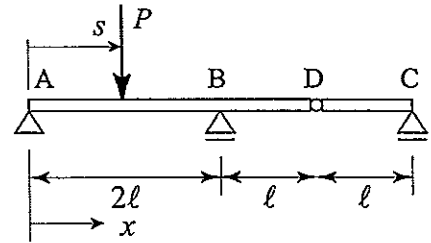


図-1

- (1) 中間支点 B 上の点 ($x = 2l$) の曲げモーメント M_B の絶対値を最大にする荷重載荷位置 s およびそのときの M_B を求めよ。

- (2) 図-2 に示すように、 y は中立軸を原点に持つ鉛直下向き座標である。(1) のとき、B 点の断面内で曲げによる軸方向垂直応力が最大となる位置 y とその点の垂直応力 σ_{\max} を求めよ。ただし、断面 2 次モーメントは I としてよい。

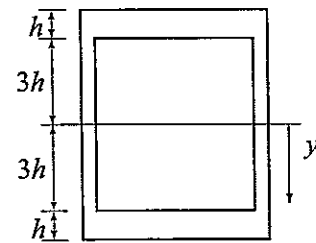


図-2

2. 図-3 に示す一様な曲げ剛性 EI を持つ梁を考える。

- (1) $x = \frac{\ell}{2}$ に集中荷重 P が作用するとき、A 点 ($x = 0$) および C 点 ($x = \frac{\ell}{2}$) の曲げモーメントを求めよ。ただし、図-4 に示す梁の $x = \ell$ のたわみが $\frac{P\ell^3}{3EI}$ 、反時計回りを正としたたわみ角が $-\frac{P\ell^2}{2EI}$ であることを用いてよい。
- (2) $x = \frac{\ell}{2}$ に集中荷重 P が作用するときのたわみの概形を描け。たわみ曲線を求める必要はないが、たわみ角がゼロとなる点に丸 (○) 印を付して明記せよ。
- (3) C 点 ($x = \frac{\ell}{2}$) のたわみの影響線の概形を描け。ただし、影響線関数を求める必要はない。

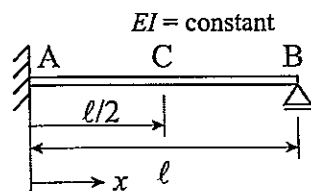


図-3

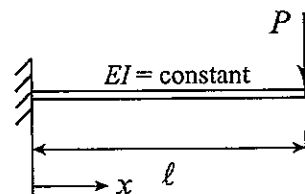
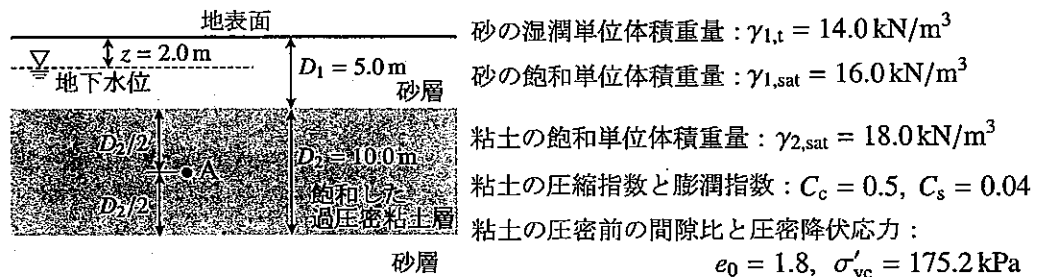


図-4

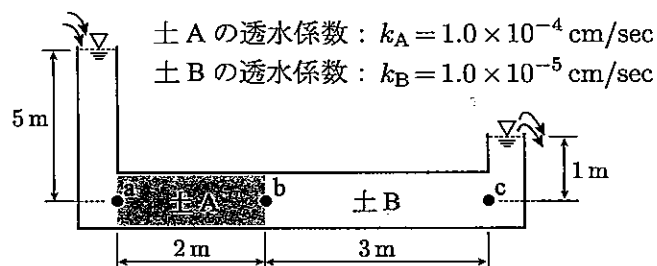
6 地盤とコンクリート (1)

- ある砂質土に対して排水三軸圧縮試験を行う。この砂質土のせん断強さはモール・クーロンの破壊規準に従うものとし、粘着力が $c' = 0$ であるとき、以下の問に答えよ。
 - 一定の側圧 $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ 、一定の背圧 $u = 100 \text{ kPa}$ で試験を行った。主応力差（軸差応力）が $\sigma_d = 200 \text{ kPa}$ に達した時点で供試体がせん断破壊した。この砂質土の内部摩擦角 ϕ' を求めよ。
 - 一定の側圧 $\sigma_3 = 400 \text{ kPa}$ 、一定の背圧 $u = 100 \text{ kPa}$ で試験を行うとき、せん断破壊が生じるときの主応力差（軸差応力） σ_d を求めよ。
- 図に示すような半無限水平地盤を考える。上下を砂層にはさまれた飽和した過圧密粘土層がある。各層は水平で、層厚は一定である。地下水位は地表面から深さ 2.0 m の位置にある。各層の層厚、湿潤単位体積重量、飽和単位体積重量は図中に示す通りである。水の単位体積重量は $\gamma_w = 9.8 \text{ kN/m}^3$ とする。このとき以下の問に答えよ。

- 粘土層の中央部（図中の点 A）の深さにおける鉛直有効応力 σ'_v を求めよ。
- 地表面に一律な上載圧力が作用して各層が圧密された。圧密終了時の鉛直有効応力の増加量は 262.8 kPa であった。このとき、粘土層の層厚 D_2 の変化量を求めよ。粘土層の圧縮指数 C_c と膨潤指数 C_s 、および粘土層の圧密前の間隙比 e_0 と圧密降伏応力 σ'_{vc} の値は図中に示す通りである。計算の際は $\log_{10} 1.5 \approx 0.18$, $\log_{10} 2 \approx 0.30$, $\log_{10} 3 \approx 0.48$, $\log_{10} 4 \approx 0.60$ という近似値を用いてよい。



- 図に示すような、透水係数が異なる土 A および土 B からなる供試体の透水を考える。土 A、土 B それぞれの透水係数 k_A, k_B の値は図中に示す通りである。図中の点 a, b, c における位置水頭をゼロとすると、点 a, b, c における全水頭をそれぞれ求めよ。



7 地盤とコンクリート (2)

1. せん断補強鉄筋（スターラップ）を有する鉄筋コンクリート梁におけるせん断補強鉄筋の役割を説明せよ。さらに、せん断補強鉄筋が受け持つせん断耐力についてトラス理論に基づいて説明せよ。

2. 鉄筋コンクリートのアルカリ骨材反応による劣化メカニズムを説明せよ。さらに、アルカリ骨材反応を起こした部材に対する劣化進展抑制のための対策方法を2つあげ、それぞれの劣化抑制メカニズムを説明せよ。

3. 次のコンクリート工学に関する専門用語を説明せよ。
 - (1) 曲げを受ける鉄筋コンクリート部材における釣合破壊
 - (2) M—N 相互作用曲線（曲げモーメントと軸方向力の相互作用曲線）
 - (3) ブリーディング
 - (4) 高流動コンクリート

8

 水理学 (1)

図-1のように、水平に置いた管路に一定の流量で水を流し、鉛直方向に接続した導水チューブで水位を測る。以下の問いに答えよ。なお、A点、B点での管路の断面積はそれぞれ S_A 、 S_B 、重力加速度は g とする。なお、導水チューブの先端は大気圧に接しており、大気圧はゼロとしてよい。損失は考えない。

1. 導水チューブの水位を測ることによって何を知ることができるか、説明しなさい。
2. A点とB点の流速の比を求めなさい。
3. B点の流速を、 S_A, S_B, h_A, h_B および g を用いて表しなさい。

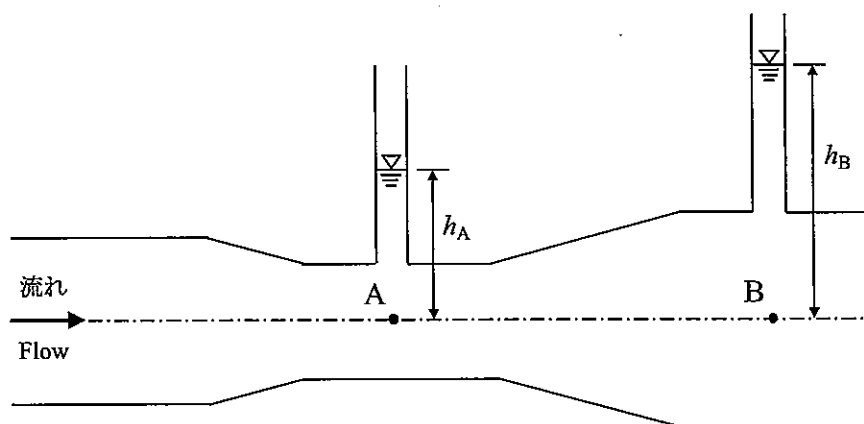


図-1 管路の流れと導水チューブによる水位計測

9 水理学 (2)

図-1 に示す 3 種類の断面を有する開水路流れ (等流) において, 次の問題に答えよ. ただし, いずれの開水路においても, マニングの粗度係数と水路床勾配は等しいものとする.

1. 開水路 1 の流量は開水路 2 の流量より大きい ($Q_1 > Q_2$) ことをマニング式を用いて示せ.
2. 開水路 1 の流量は開水路 3 の流量より大きい ($Q_1 > Q_3$) ことをマニング式を用いて示せ.
3. 開水路 1 の場合, 開水路の幅が $2d$ であるときに最も流量が大きくなることを示せ.

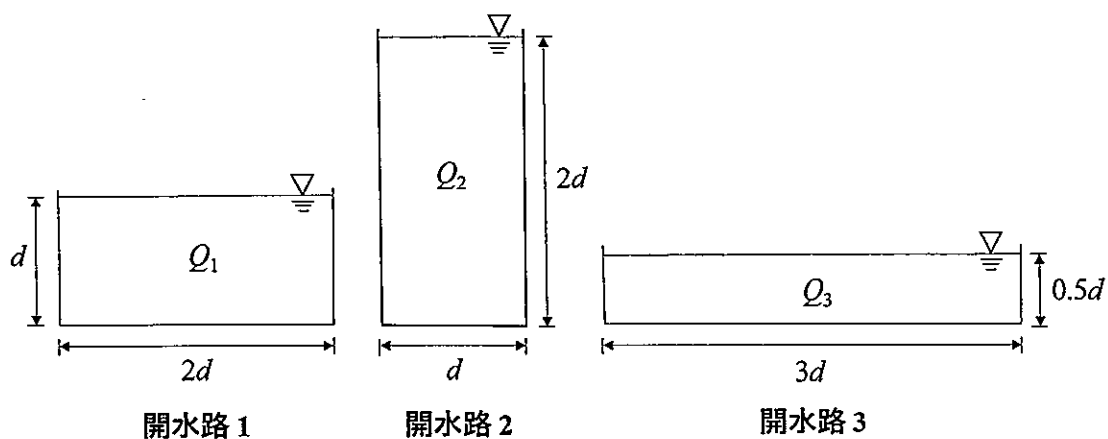


図-1 3 種類の開水路断面

10 水質と環境 (1)

1. 流量 $500,000 \text{ m}^3/\text{d}$, BOD 1 mg/L の河川に, 流量 $50,000 \text{ m}^3/\text{d}$, BOD 200 mg/L の下水を処理後に放流する. 河川の BOD を 2 mg/L 以下に保つために必要な BOD 除去率を求めよ.
2. 標準活性汚泥法による汚水中の有機物の除去機構を説明せよ.
3. 下水処理水の高度処理に関する以下の間に答えよ.
 - (1) 下水処理水の再利用を目的とした場合の除去対象物質を 1 つあげ, その高度処理方法を説明せよ.
 - (2) 水域の富栄養化の防止を目的とした場合の除去対象物質を 1 つあげ, その高度処理方法を説明せよ.

11 水質と環境 (2)

1. 流れ場における粒子の沈降分離に関わる以下の文章を完成させよ.

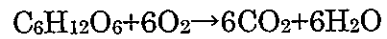
理想状態として流れの前後方向及び断面方向に混合がない状況を仮定した **a** 理論では, 沈殿池に流入した粒子は, 水平方向に流れと同じ速度 v [m/s], 垂直方向に沈降速度 w [m/s] を持つと仮定する. 深さが Z [m], 長さが L [m], 幅が B [m] の矩形沈殿池において, 沈殿池の滞留時間 L/v [s] における沈降距離 Lw/v [m] が沈殿池深さ Z [m] よりも大きい粒子, つまり沈降速度 w [m/s] が $w_0 = Z/(L/v)$ [m/s] よりも大きい粒子は全て沈殿する. この w_0 は **b** と呼ばれ, 沈殿池への流量 Q [m³/s] と沈殿池の底面積 A [m²] より $w_0 =$ **c** で与えられる.

2. 浄水処理における膜ろ過処理について, 以下の問いに答えよ.

- (1) ろ過膜を細孔の大きさによって4つに分類し, それぞれのおおよその膜孔径 (または分画分子量) と代表的な分離対象物質を記せ.
- (2) 膜面と水の流れの関係により膜ろ過の運転方法を2つに分類し, それぞれの長所と短所を記せ.

12 生物と生態 (1)

(1) 生物体内で見られる以下の化学反応を説明せよ.



(2) エネルギー流量と栄養段階の言葉を用いて生態系ピラミッドを説明せよ.

(3) 生態系における分解者と消費者について説明せよ.

13 生物と生態 (2)

1. 生物多様性について、3つの異なるスケールに基づいて説明せよ。
2. 窒素循環に関わる微生物反応を3つ挙げ、それらの化学反応式および関与する微生物について説明せよ。
3. ポリリン酸蓄積細菌のリン蓄積メカニズムについて説明せよ。

14 交通工学

図1のように、起点と終点が長さ60kmの高速道路と一般街路で結ばれている。高速道路の交通流率-交通密度の関係は図2のように与えられており、高速道路には起点から30km地点に、容量2000[台/時]のボトルネックがある。一方、一般街路は一定の速度30[km/時]で走行することができ、十分な交通容量を持つ。時刻 $t=0$ から4000[台/時]の需要が起点から終点に向かって流れ始め、利用者は実際に経験する最短旅行時間の経路を選択し、最終的に利用者均衡状態が達成される。また、ボトルネックサービスはFirst In First Outとする。この時、次の問いに答えなさい。

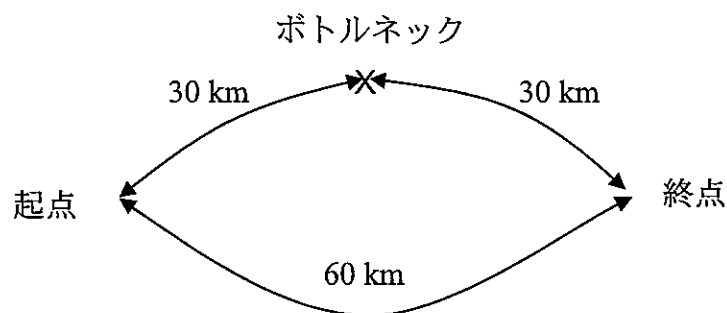


図1 2経路のネットワーク

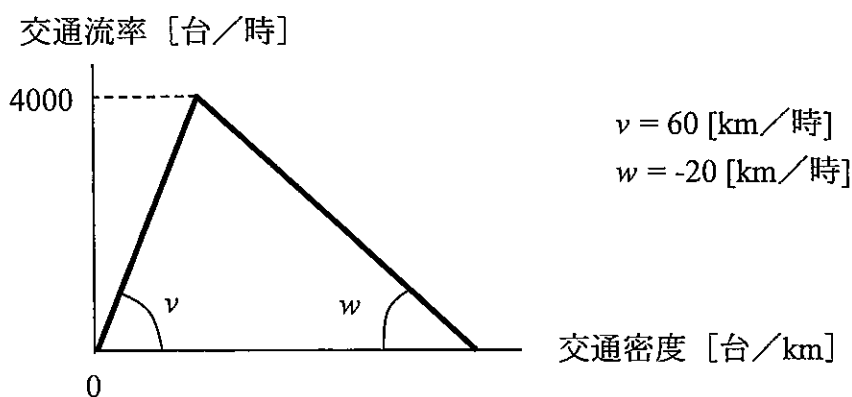


図2 高速道路の交通流率-交通密度関係

- (1) 高速道路に渋滞が発生する時刻を求めよ。
- (2) 利用者均衡状態における起終点間の旅行時間を求めよ。
- (3) 一般街路に需要が流れ始める時刻を求めよ。
- (4) 高速道路の渋滞流中の旅行速度を求めよ。
- (5) 利用者均衡状態における高速道路の渋滞長 [km] を求めよ。

15 交通計画

1つの起終点(OD) ペアとそれを結ぶ2本の経路からなる交通ネットワークを考える。OD交通量 q は(交通費用によらず)12000[トリップ/時]である。経路 i の旅行時間 t_i は、次のように与えられる:

$$t_1 = 25 + (10/2000) \times f_1 \text{ [分]}, \quad (\text{A})$$

$$t_2 = 45 \text{ [分]},$$

ここで、 f_i は経路 i の交通量[トリップ/時]である。また、全ての利用者の時間価値は50[円/分]と仮定し、経路 i の交通費用 c_i を

$$c_i = 50 \times t_i + m_i \text{ [円]} \quad (i=1, 2)$$

と定義する。ここで、 m_i は経路 i の通行料金である。利用者は交通費用が最小の経路を選択し、交通量パターンは利用者均衡(UE)状態(すなわち、どの利用者も自分だけが経路を変更しても自分の交通費用を改善できない状態)となると仮定する。

以下の(1)と(2)では通行料金を徴収しない状況(つまり、 $m_1 = m_2 = 0$)を、(3)と(4)では経路1のみ通行料金を徴収する状況(つまり、 $m_1 > 0, m_2 = 0$)を考える。

(1) UE状態での経路交通量パターン(f_1, f_2)、及び、交通ネットワーク全体で費やされる総旅行時間 $TT \equiv t_1 f_1 + t_2 f_2$ を求めよ。

(2) 経路1の旅行時間と交通量の関係は、車線拡幅プロジェクトを実施すれば、

$$t_1 = 25 + (10/4000) \times f_1 \text{ [分]} \quad (\text{B})$$

と改善される。この旅行時間関数の下で、UE状態の経路交通量パターンと総旅行時間を求めよ。

(3) プロジェクトを実施しない(つまり、経路1の旅行時間が式(A)で与えられる)場合について、総旅行時間を最小化する料金、及び、そのときの経路交通量パターンを求めよ。

(4) プロジェクトを実施する(つまり、旅行時間が式(B)で与えられる)場合について、総旅行時間を最小化する料金、及び、そのときの経路交通量パターンを求めよ。

(5) 上記4種類の条件下での総旅行時間を比較し、その大小関係が成立する理由を簡潔に説明せよ。

16 計画数理 (1)

1. 正の実数 $a > 0$ をパラメータに持つ次の線形計画問題 P1 を考える. この問題の基本形は P2 のように表現できる. 以下の問に答えよ.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P1)} \quad \max_{x_1, x_2} & 2x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq a \\
 & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
 & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{(P2)} \quad \max_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & 2x_1 + x_2 = z \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = a \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
 & 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 20 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

(1) 線形計画問題 P2 の基底解の個数を示せ.

(2) P2 の基底解のうち, 次の 4 つが最適解になる可能性がある.

$$\mathbf{x}_A = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, 0, 0, 8+a, 20-5a)$$

$$\mathbf{x}_B = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 0, a-4, 12, 0)$$

$$\mathbf{x}_C = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 5, a-7, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_D = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{20-2a}{3}, \frac{5a-20}{3}, 0, 28-4a, 0 \right)$$

それぞれの基底解における目的関数の値を求めよ.

(3) (2)の基底解のそれぞれについて, 実行可能性を満たすパラメータ a の範囲を示せ.

(4) 線形計画問題 P2 の最適値を, パラメータ a の関数として示せ.

2. 2次元平面上に n 個の点を与えられている. 同じ平面上の領域 S に 1 点 $\mathbf{x} = (x, y)$ をとり, 点 \mathbf{x} から n 個の各点までの Euclid 距離の 2 乗の和を最小化する問題を考える. 領域 S は次の制約式で与えられる: $x^2 + 2y \leq 8, x \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$. 以下の問に答えよ.

(1) 上記の最小化問題は, n 個の点の重心点と点 \mathbf{x} の Euclid 距離の 2 乗を最小化する問題と等価であることを示せ.

(2) $n = 4$ とし, 与点の座標値を $(6, 3), (7, 4), (9, 1), (10, 0)$ とする. (1) の関係を用いて, 最小化問題を定式化せよ.

(3) (2) の問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を示せ.

(4) $\mathbf{x}^* = (2, 2)$ における Lagrange 乗数の値を求め, (3) の条件を満たしていることを示せ.

17 計画数理 (2)

1. ある財の時点 t における価格を p_t で表す。 p_t のダイナミクスは差分方程式

$$p_t + \frac{a}{b} p_{t-1} - c = 0 \quad (t=1, 2, \dots)$$

で表される (ただし, $a, b, c > 0$). 以下の問に答えよ.

- (1) $p_0 = p_1 = \dots = p^e$ となる定常解 p^e を求めよ.
 - (2) 収束する場合と発散する場合のそれぞれについて $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ の概形を図示せよ.
 - (3) p_t が定常解に収束するための十分条件を示せ.
 - (4) 第0期の価格が $p_0 = \bar{p}$ で与えられたとする。 p_t の一般解を求めよ.
2. N 人の応募者の中から有能な秘書を一人だけ雇用したい。応募者をランダムに並び替えてから一人ずつ面接を行っていきとしよう。面接するたびに面接した応募者を採用するかどうかを決める。採用する場合は残りの応募者の面接は行わない。採用しない場合は次の応募者の面接に移る。

応募者の能力を確率変数 S で表す。 S は独立な一様分布に従い、確率密度関数は

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と表されることが分かっている。面接により面接した応募者の真の能力を把握できる。能力 s の応募者を採用すると効用 s を得るが、応募者を一人面接する度に $c (> 0)$ の不効用を得る。

以下では、面接した応募者の能力が s^* 以上の場合には採用し、 s^* 未満の場合には採用せずに次の応募者の面接に移る戦略を考える。 N は無限に大きいとして以下の問に答えよ。

- (1) n 人を面接したところ、 s^* 以上の能力の応募者が一人もいなかった状況を考える。それ以降に得られる期待効用 $V(n)$ は次式を満たす。空欄に入る数式を s と $f(s)$ を用いて表せ。

$$V(n) = s^* V(n+1) + \int_{s^*}^1 \boxed{} ds - c$$

- (2) $V(n)$ と $V(n+1)$ の間には以下の関係式が成り立つ。その理由を説明せよ。

$$V(n) = V(n+1)$$

- (3) $V(n)$ を求めよ。
- (4) $V(n)$ を最大化する s^* を求めよ。