2020.秋

小論文

近年、人工知能(AI) の発展により、様々な分野における技術革新が進んでいる。土木工学分野における人工知能の活用について、その役割、意義、課題を論ぜよ（1200字以内）。

$\boxed{1}$ 数学（微分・積分）

1. 以下の問いに答えなさい.

   (a) 次の極限値を調べよ.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x - \cos x}{\sin x}$$

   (b) 次の関数を微分しなさい.

$$y = x^{\cos x}$$

   (c) 以下の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$$

2. 以下の積分方程式について次の問いに答えなさい. ただし, $G(t)$ は微分可能な関数である.

$$I = \int_0^t G(z)e^{t-z}dz + 2G(t) = 2$$

   (a) $G(0)$ を求めよ.

   (b) $G'(0)$ を求めよ.

   (c) $G(t)$ を求めよ.

3. 次の微分方程式を解きなさい.

$$(1 + \sin y)dx = [2y \cos y - x(\sec y + \tan y)]dy$$

2 数学（線形代数）

1. $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を線形写像 f とする．ここに

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) 線形写像 f の核 $\ker(f)$ の基底を求めなさい．

(2) 線形写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めなさい．

2. $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値と対応する正規化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(2) $\boldsymbol{B}^2 - 5\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{I}$ を計算しなさい．ただし $\boldsymbol{I}$ は 2×2 の単位行列である．

(3) $\boldsymbol{B}^5 - 5\boldsymbol{B}^4 + 4\boldsymbol{B}^3 - \boldsymbol{B}^2 + 5\boldsymbol{B}$ を計算しなさい．

(4) $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{B}$ を満たす $\boldsymbol{C}$ を求めなさい．

3 数学（確率・統計）

1. 1から6までの目が同じ確率で出るさいころを3個ふり，３つの数を得る．その3つの数の和を x とし，最大値を y とするとき，下記の問いに答えなさい．

   (1) その３つの数が各々奇数となる確率を求めなさい．

   (2) x が奇数となり，その３つの数の内１つだけ奇数となる確率を求めなさい．

   (3) $x = 5$ となる確率を求めなさい．

   (4) $y = 4$ となる確率を求めなさい．

2. X と Y の確率分布が以下のように与えられるとき，下記の問いに答えなさい．

$X \setminus Y$	1	2	3	
1	1/10	1/10	2/10	4/10
2	2/10	1/10	3/10	6/10
	3/10	2/10	5/10	1

   (1) X の平均と分散を求めなさい．

   (2) $X+Y$ の平均と分散を求めなさい．

3. Z は標準正規分布

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \qquad (-\infty < z < \infty)$$

に従って分布する確率変数である．下記の問いに答えなさい．

   (1) 変換 $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ により $f(z)$ を他の分布 $g(x)$ に座標変換しなさい．

   (2) １０００人の学生が１００点満点の試験を受けたところ，平均得点が６５点，標準偏差が１５の正規分布にほぼ従った。$Z \leq c$ である確率が $P(c)$ により与えられるとき，８０点の生徒はほぼ何番であるかを求めなさい．

4 弾性体と構造の力学（1）

Hooke 則は以下のように与えられる．

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left\{\sigma_{xx}-\nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right\},\ \varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left\{\sigma_{yy}-\nu(\sigma_{zz}+\sigma_{xx})\right\},\ \varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left\{\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right\}$$
$$\gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy}=\frac{1}{G}\sigma_{xy},\ \gamma_{yz}=2\varepsilon_{yz}=\frac{1}{G}\sigma_{yz},\ \gamma_{zx}=2\varepsilon_{zx}=\frac{1}{G}\sigma_{zx} \tag{1}$$

ここに，E はヤング率，ν はポアソン比である．G はせん断弾性係数であり，E と ν を使って以下のように表される．

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2}$$

線形弾性体に関する以下の問いに答えよ．

1. 平面応力状態と平面ひずみ状態におけるひずみ成分 ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy} と応力成分 σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} の関係をそれぞれ導出し，行列形式で表せ．

2. 平面応力状態にある弾性板を x 軸方向に一様な力で引っ張ったところ，以下に示す応力 $\boldsymbol{\sigma}$ とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ が発生した．板は初期に無応力状態にあり，均質一様に変形したものとする．この板のヤング率 E とポアソン比 ν を求めよ．

$$[\boldsymbol{\sigma}]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.8 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}(\mathrm{MPa}),\quad [\boldsymbol{\varepsilon}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02 & 0\\ 0 & -0.008\end{bmatrix}$$

3. 平面ひずみ状態にある弾性体に以下のひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ を生じさせた．弾性体の材質は設問 2 における板と同じである．弾性体は初期に無応力状態にあり，均質一様に変形したものとする．発生する応力 の成分 σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} を求めよ．

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01 & 0.02\\ 0.02 & 0.01\end{bmatrix}$$

4. 設問 3 における主応力 σ_1, σ_2 とそれらの主方向ベクトル $\{\boldsymbol{n}_1\}=\begin{Bmatrix}n_{1x}\\ n_{1y}\end{Bmatrix}$, $\{\boldsymbol{n}_2\}=\begin{Bmatrix}n_{2x}\\ n_{2y}\end{Bmatrix}$ を求めよ．

5 弾性体と構造の力学（2）

1. 図-1 に示すように，C 点に集中荷重 P が作用する単純支持梁について，以下の問いに答えよ．ただし，梁の曲げ剛性を EI（=const.）とする．

(1) 支点 A，B の反力 R_A，R_B を求めよ．

(2) AC 区間，BC 区間の任意の点の鉛直変位 y_1，y_2 を求める式を誘導するとともに，C 点の鉛直変位を求めよ．

(3) $a > b$ の場合，梁全体 AB 区間の中で最大鉛直変位が生じる位置を求めよ．

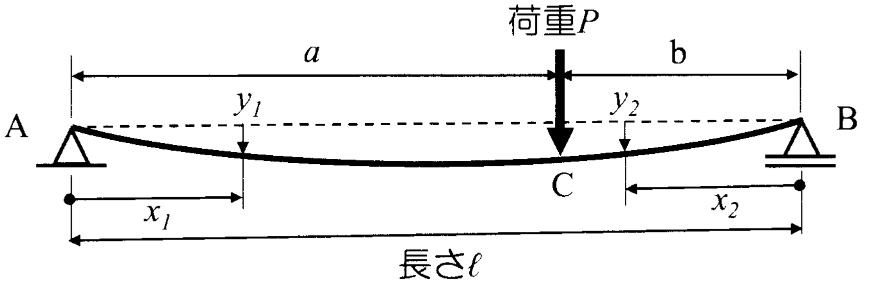


図-1　曲げ剛性 EI，長さℓの単純支持梁

2. 図-2 に示すように，その頂部で剛板を介して荷重 P を受ける塔構造において，高さによらず水平断面の圧縮応力 σ が一定となるとき，以下の問いに答えよ．なお，塔の単位体積重量を γ とする．

(1) 断面 x における微小要素に対する力の釣り合い式を誘導せよ．

(2) (1)で求めた微分方程式を解き，塔の任意の高さ x の水平断面の断面積 A_x を P，γ，A_0, x を用いた式として表せ．

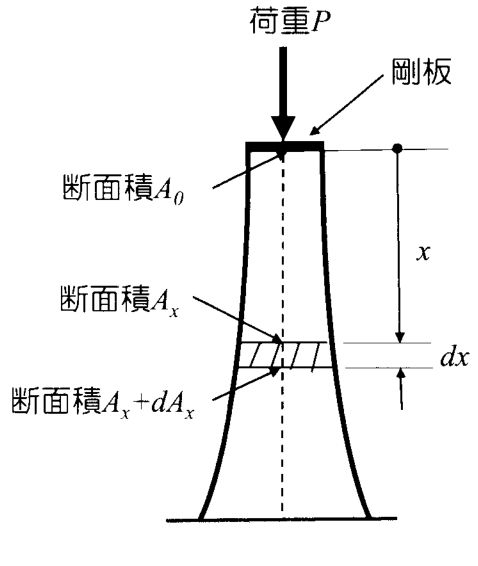
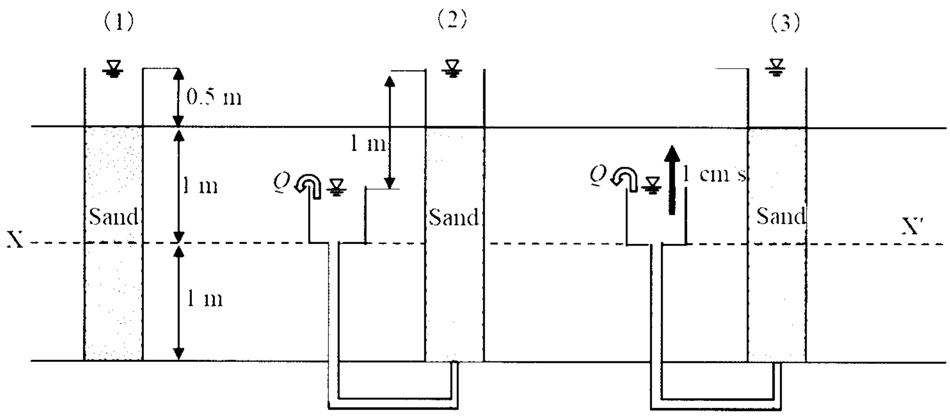


図-2　高さによらず水平断面の圧縮応力が一定の塔構造

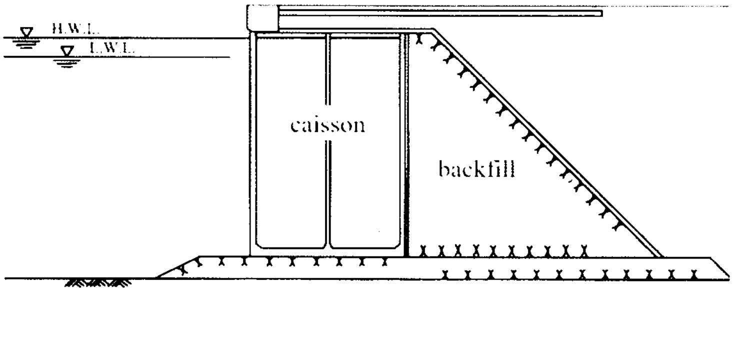
6 地盤とコンクリート (1)

1. 地盤工学に関する次の語句を各 200 字程度で説明せよ．式や図を用いてもよい．
   (1) 間隙比
   (2) 有効応力原理
   (3) 圧密
   (4) 液状化現象

2. 図は浸透カラム試験の状態を表している．以下の問いに答えよ．
なお，砂と容器側面の摩擦は無視でき，定常状態と考えてよい．また，水の単位体積重量 は$\gamma_w = 9.8$ kN/m^3 ，砂の飽和単位体積重量 は$\gamma_{sat} = 19.8$ kN/m^3，砂柱の断面積は$A = 100$ cm^2 とする．
   (1) の場合，XX′ 面の全鉛直応力と有効鉛直応力を計算せよ．
   (2) の場合，流量 Q が 0.4 cm^3/s のとき，砂の透水係数を求めよ．
   (3) （2）の状態（t = 0 秒）から 1 秒間に 1 cm の速さで左側の水面を上昇させた．流量 $Q(t)$と XX′ 面の有効鉛直応力 $\sigma_v'(t)$ の時間変化を 0〜300 秒まで描け．



3. 下図のような重力式係船岸の破壊モードを列挙し，それぞれの破壊モードに対する安全性の照査方法を説明せよ．図を用いて説明してもよい．



7 地盤とコンクリート (2)

1. 鉄筋コンクリート部材の終局曲げ耐力を計算する際に，一般に適用されている仮定を 3 つ以上挙げて説明せよ．

2. AE 剤の主要な効能を 2 つ挙げ，そのメカニズムについて説明せよ．

3. 次のコンクリート工学に関する専門用語を説明せよ．
   (1) エーライト
   (2) エフロレッセンス
   (3) 中立軸
   (4) 鉄筋の付着破壊

8 水理学（1）

図-1 のように半円柱 ABCD の下に，半円錐 ABE が接続している柱が水槽の壁面に設置されている．半円柱と半円錐からなる柱全体に作用する水平方向の全圧力 P_H，その作用点の深さ h_H, および鉛直方向の全圧力 P_Vを求めよ．ただし，半円柱，半円錐の径を R, 水の密度を ρ, 重力加速度を g とせよ．

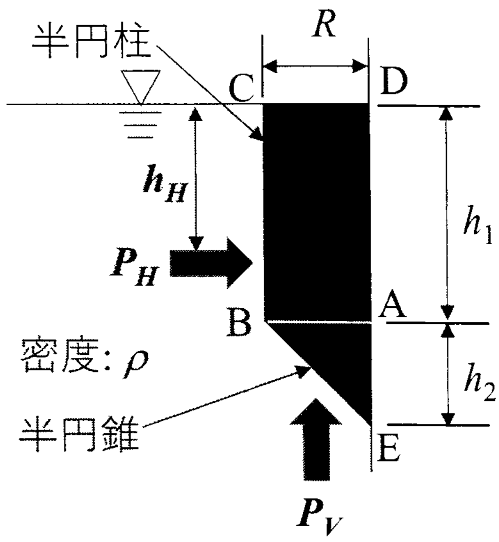


図-1　水中に設置された柱

9 水理学 (2)

図-1 に示すように，管路内の水がポイント①（直径 $2D$，水圧 p_1，流速 v_1）からポイント②（直径 D，流速 v_2）まで流れている．ポイント①と②の標高差は z である．全ての損失を無視し，図中の記号および水の密度 ρ，重力加速度 g を用いて，以下の問いに答えよ．

1. ポイント②での流速 v_2 を求めよ．
2. 噴水の高さ H を求めよ．
3. 噴水の高さを $2H$ にするために，ポイント②で必要な直径を求めよ．

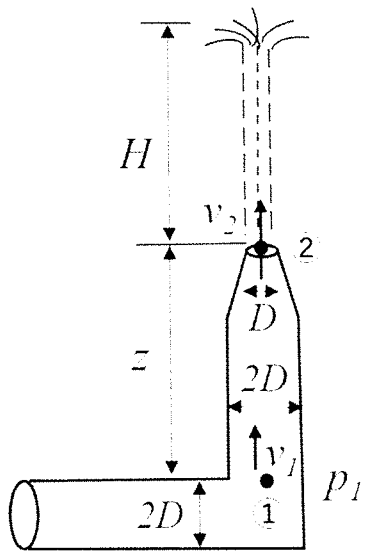


図-1　管路から大気中への流れ

10 水質と環境（1）

下の図のような最初沈澱池と最終沈澱池，曝気槽からなる廃水処理施設について，曝気槽流入水の流量水量 Q_S，平均 SS（Suspended Solids）濃度 C_{SS}，曝気槽内水の容積 V，MLSS（Mixed Liquor Suspended Solids）濃度 C_A，最終沈澱池の処理水平均 SS 濃度 C_{ESS}，返送汚泥濃度 C_{RSS}，返送汚泥量 Q_R，余剰汚泥量 Q_W が観測されるとき，以下の各問に答えよ．

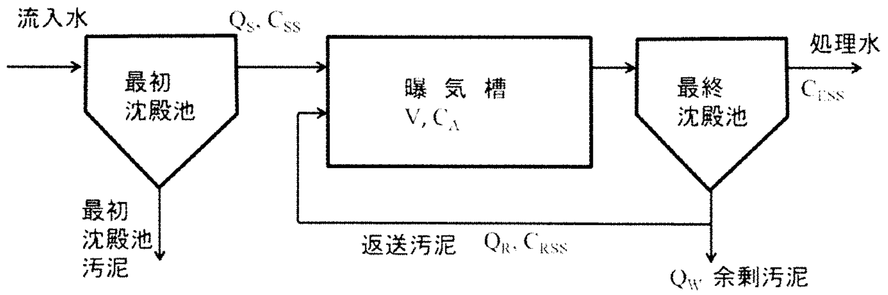


図-1 廃水処理施設

(1) この曝気槽の水理学的滞留時間 HRT (Hydraulic Retention Time)を求めよ．

(2) この曝気槽内の混合液浮遊物質 MLSS 濃度 C_A を求めよ．

(3) MLSS の 30 分間沈降率 P_V(%)と C_A を用いて，SVI（Sludge Volume Index）を求めよ．

(4) バルキングとは何かを説明せよ．

(5) バルキングが生じる一般的な SVI の値を述べよ．

(6) 処理場において汚泥の状況を調べるために使われる指標を複数挙げよ．

11 水質と環境（2）

1. 上水道における高度浄水処理について，以下の問に答えよ．
   (1) 目的を述べよ．
   (2) 代表的な処理方法を 1 つ挙げ，その特徴を述べよ．

2. 微生物の培養を行い，培養液中での微生物濃度の経時変化を測定したところ，表-1 のような結果が得られた．これをグラフ化したところ，図-1 のようになった．このときの比増殖速度を求めよ．必要に応じて，次の値を用いてよい．
   $\ln 2 = 0.693$，$\ln 3 = 1.10$，$\ln 10 = 2.30$．ここに ln は自然対数を示す．

表-1　測定結果

時間[h]	微生物濃度[mg L^{-1}]
0	0.03
3	0.05
6	0.10
9	0.18
12	0.33
15	0.60
18	1.10
21	2.00

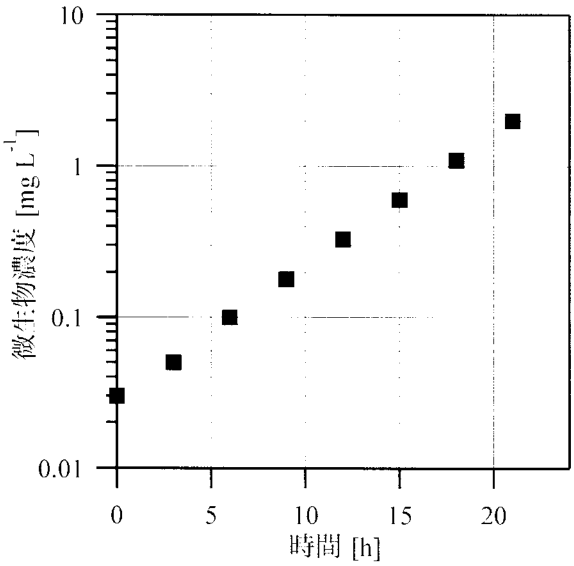


図-1　測定結果

12 生物と生態（1）

1．次のキーワードを説明せよ．

（1） アンモニア酸化細菌
（2） 脱窒反応
（3） 酸性雨
（4） バイオアッセイ
（5） リン蓄積細菌

2．湖沼の生態系と栄養塩の動態を図示せよ．また，その生態系における生産者，捕食者および分解者の代表的生物とその代謝反応を説明せよ．

13 生物と生態（2）

1. 森林生態系の機能に関して５項目挙げて簡潔に説明せよ.

2. 好気性生物学的排水浄化システムに関して次の問いに答えよ.
   (1) 好気性生物学的排水浄化システムが多く採用されている理由を説明せよ.
   (2) 活性汚泥法と生物膜法のそれぞれの特徴を説明せよ.

14 交通 (1)

1．基本ダイアグラムが図 1 で示される道路上の交通流について，以下の問いに答えよ．(2)については解の導出過程も示せ．この道路は単路であり，途中に合流，分流，交差点はなく，すべての車両はこの道路の上流側から流入する．

(1) 交通密度が 80 veh/km であるときの速度を示せ．

(2) この道路の上流側から 1000 veh/h の交通流率の交通流が継続して流入しているとき，上流側から十分離れた道路上のある地点で交通事故が発生し，通行止めが発生した．通行止めは 30 分で解消した．通行止めが解消後，渋滞が完全に消滅するまでに要する時間を計算し答えよ．

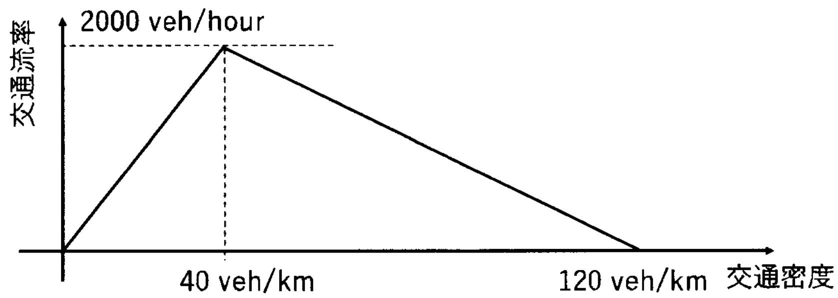


図 1 基本ダイアグラム

2．ある道路のある地点にライトレールの軌道との交差点を設置する．この交差点は信号機で制御される．列車が 1 本通過すると道路側に 1 分間の赤信号が出される．列車が通過しないときは道路側には青信号が継続して出される．列車は一方向にのみ走行する．道路の上流側からは 1200 veh/h の交通流率の交通流が継続して流入する．飽和交通流率は 2400 veh/h とし，青信号が出ているあいだは常にこの飽和交通流率が実現するとする．このとき以下の問に答えよ．解の導出過程も示せ．

(1) 列車の運行間隔を 5 分間に設定したときの，この交差点における道路側の車両の平均遅れ時間を計算し答えよ．

(2) 列車の運行間隔を短かくしすぎると，赤信号により道路側に発生する待ち行列が青信号でもさばききれず，渋滞が継続して延伸してしまう．このような状況が発生しない最小の運行間隔を計算し答えよ．道路に流入する交通流には揺らぎは全くなく，交通流率が常に厳密に 1200 veh/h に等しいと考えよ．

(3) 編成長を倍にした列車を 10 分間隔で運行することを検討する，この列車が交差点を走行するときは，道路側に連続して 90 秒間の赤信号を出さなくてはならない．この運行方法の，(1)における運行方法に対するメリットないしデメリットを，鉄道旅客と道路利用者の旅行時間に関する定量的な根拠を明示しつつ説明せよ．

15 交通 (2)

1つの起終点(OD) ペアとそれを結ぶ2本の経路からなる交通ネットワークを考える．経路 i の旅行時間 t_i は，次のように与えられる：

$$t_1 = 10 + f_1 \ [分], \tag{C-1}$$

$$t_2 = 30 + f_2 / 2 \ [分], \tag{C-2}$$

ここで，f_i は経路 i の交通量 [10^3 台/時] である．また，全ての利用者の時間価値は 50 [円/分]と仮定し，経路 i の交通費用 c_i を

$$c_i = 50 \times t_i + m_i \ [円] \quad (i = 1, 2) \tag{C-3}$$

と定義する．ここで，m_i は経路 i の通行料金である．利用者は交通費用が最小の経路を選択し，交通量パターンは利用者均衡 (UE) 状態（すなわち，どの利用者も自分だけが経路を変更しても自分の交通費用を改善できない状態）となると仮定する．

以下の **問(1)～(3)では通行料金を徴収しない状況**（つまり，$m_1 = m_2 = 0$）を，**問(4)～(5)では通行料金を徴収する状況**（つまり，$m_1 > 0, m_2 > 0$）を考える．

(1) OD 交通量が $q = 50$ [10^3 台/時] と与えられたとき，UE 状態での経路交通量パターン (f_1, f_2)，および均衡交通費用 u [円] を求めよ．

(2) UE 状態での均衡交通費用 u [円] を OD 交通量 q の関数（以下では，この関数を **OD 性能関数**と呼ぶ）として表現せよ．

(3) OD 交通量 q が均衡交通費用 u [円] に関して単調減少な OD **需要関数**

$$q(u) = 90 - u / 50 \ [10^3 台/時] \tag{D}$$

で与えられるとする．OD 需要条件 (D) と問 (2)で求めた OD 性能条件を同時に満たす均衡状態 $\boldsymbol{UE}^*$ における OD 交通量 q^*，均衡交通費用 u^*，消費者余剰 CS^*，経路交通量 (f_1^*, f_2^*)，総旅行時間 $TT^* \equiv f_1^* t_1(f_1^*) + f_2^* t_2(f_2^*)$ を求めよ．

(4) 通行料金 $m_1 = 1000, m_2 = 500$ [円] を賦課したときの OD 性能関数を求めよ．

(5) OD 需要条件 (D) と問 (4)で求めた OD 性能条件を同時に満たす均衡状態 $\boldsymbol{UE}^{**}$ における OD 交通量 q^{**}，均衡交通費用 u^{**}，消費者余剰 CS^{**}，総料金収入 PS^{**}，総旅行時間 TT^{**} を求めよ．

(6) 状態 $\boldsymbol{UE}^*$ における社会的余剰と状態 $\boldsymbol{UE}^{**}$ における社会的余剰を比較し，その大小関係が成立する理由を簡潔に説明せよ．

16 計画数理（1）

1. 次の線形計画問題(P)を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad & \text{maximize} && x_1 + x_2 \\
& \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \le 1 \\
&&& x_1 \le \frac{3}{7} \\
&&& x_1 \ge \frac{1}{3} \\
&&& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(1) 問題(P)に対する標準形(P1)を定式化せよ．

(2) 問題(P1)のシンプレックス表の一部を次に示す．最終ステップの基底変数と目的関数の値を求め，(A)から(D)の空白を埋めよ．

Step		基底	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	θ
1	0	x_3	1	2	1	0	0	1	
	0	x_4	1	0	0	1	0	3/7	
	0	x_5	-1	0	0	0	1	-1/3	
		z	-1	-1	0	0	0	0	
		θ	1	*	*	*	0		
3	0	x_3	0	2	1	-1	0	4/7	2/7
	0	x_5	0	0	0	1	1	2/21	*
	1	x_1	1	0	0	1	0	3/7	*
		z	0	-1	0	1	0	3/7	
4	1	x_2	0	1	1/2	-1/2	0	(A)	
	0	x_5	0	0	0	1	1	(B)	
	1	x_1	1	0	0	1	0	(C)	
		z	0	0	1/2	1/2	0	(D)	

(3) 問題(P1)の最適解を求めよ．

2. 次の二次計画問題(Q)を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{(Q)}\quad & \text{minimize} && \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
& \text{subject to} && x_1 + 2x_2 = 1 \\
&&& x_1 \ge \frac{1}{3} \\
&&& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(1) 目的関数の二次係数行列の固有値を求め，半正定性を示せ．

(2) 問題(Q)に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件を示せ．

(3) 問題(Q)の最適解を求めよ．

17 計画数理（2）

1. 来月の景気を予想して報告するよう上司に指示されたとしよう．あなたの予想を $\mathbf{p}=(p_d,p_u)$ で表す．p_d と p_u は「景気が下向きになる」という予想（主観確率）と「景気が上向きになる」という予想をそれぞれ表している（$p_d+p_u=1$）．あなたは自分の予想を上司に正直に報告する必要はない，すなわち，上司への報告とあなたの予想は異なってもよい．上司への報告を $\mathbf{q}=(q_d,q_u)$ で表す．q_d と q_u は，あなたが上司に報告する「景気が下向きになる確率」と「景気が上向きになる確率」をそれぞれ表す（$q_d+q_u=1$）．一か月後，あなたは景気が下向いた場合に利得 $u(q_d)=A+B\ln q_d$，上向いた場合に利得 $u(q_u)=A+B\ln q_u$ を得る（$A,B>0$）．期待利得は $EU(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sum_{i=d,u}p_i u(q_i)$ と表される．

   (1) 最適報告戦略 $(q_d^*(\mathbf{p}),q_u^*(\mathbf{p}))$ を求めよ．

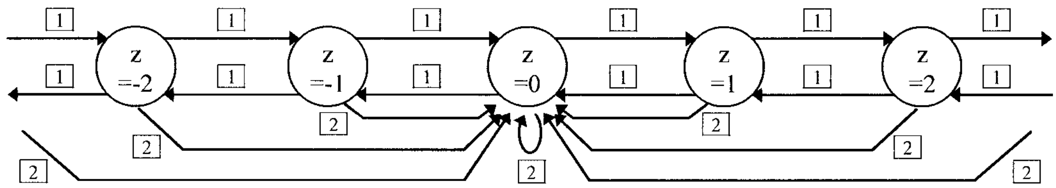
   (2) 最適報告戦略のもとでの期待利得 $V(\mathbf{p})$ のグラフの概形を描け．

2. 無限次元の離散的なマルコフ過程 X_t $(t=1,2,\ldots)$ は次式で与えられる．

$$\Pr\{X_{t+1}=z\}=\frac{1-q}{2}\Pr\{X_t=z-1\}+\frac{1-q}{2}\Pr\{X_t=z+1\}+q\delta(z),\quad z\in Z \qquad (1)$$

   ただし，X_t は整数集合 Z に含まれる任意の値をとりうる確率変数，$q\,(0<q<1)$ は定数，$\delta(z)$ は $z=0$ の場合に $\delta(z)=1$，$z\neq 0$ の場合に $\delta(z)=0$ となる関数である．

   (1) 状態遷移図の $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ を埋めよ．



   (2) 定常確率を $\mathbf{p}^*=(p_z^*)_{z\in Z}$ で表す．マルコフ過程の対称性より任意の $z\in Z$ について $p_z^*=p_{-z}^*$ が成り立ち，式(1)を以下の通り変形できる．$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ を埋めよ．

$$\begin{cases} p_0^* - \boxed{3}\times p_1^* - \boxed{4} = 0 & (2a) \\ p_{n+2}^* - \boxed{5}\times p_{n+1}^* + \boxed{6}\times p_n^* = 0 \qquad n=0,1,\ldots & (2b) \end{cases}$$

   (3) 式(2b)の一般解を $p_n^*=Cr^n$ $(n=0,1,\ldots)$ と表す．C と r は定数である．r を求めよ．

   (4) 式(2b)の一般解を $p_n^*=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ $(n=0,1,\ldots)$ と表す．C_1 と C_2 は定数，r_1 と r_2 は問(3)の解である．未知数である C_1 と C_2 を求めるための境界条件を示せ．