小論文

東日本大震災から 10 年が経ち，地震に対する様々な減災対策が実施されてきた．ハードおよびソフト面からの減災対策の具体例を複数挙げて，これらの組み合わせの効果について論ぜよ．（1200 字以内）

1 数学（微分・積分）

1. 以下の問いに答えよ．

(1) 次の関数 $f(x)$ を微分せよ．

$$f(x) = x^{x^x} \quad (x > 0)$$

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\}$$

2. 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \frac{[x]}{x} \quad (0 < x < 3)$$

ガウス記号 $[x]$ は床関数を表す．その値は実数 x に対して x 以下である最大の整数で与えられる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(1/2), f(1), f(3/2)$ の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ のグラフを描け．

3. 次の重積分について，以下の問いに答えよ．

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad D = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq x\right\}$$

(1) 積分領域 D を図示せよ．

(2) この重積分を計算せよ．

4. 次の微分方程式を解け．

$$(x + y)\mathrm{d}x - (x - y)\mathrm{d}y = 0$$

2 数学（線形代数）

1. 正方行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

a) A の固有値 λ_1，λ_2 $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ と，それら固有値に対する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{n}_1 = \begin{Bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{Bmatrix}$， $\boldsymbol{n}_2 = \begin{Bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{Bmatrix}$ を求めよ．

b) 次の多項式を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である．

$$f(A) = A^5 - 6A^4 + 3A^3 - A^2 + 54A + 18I$$

2. $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \kappa \end{Bmatrix}$ とする．

いま，あるベクトル $z = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{D}^T z = \boldsymbol{0}$ を満たしている．以下の問に答えよ．

(1) p，q，r の関係を示せ．

(2) $\boldsymbol{Dx} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ が存在するとき，α, β, γ が満たすべき必要条件を示せ．

(3) $\boldsymbol{Ey} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$ が存在するとき，α, β, γ が満たすべき必要条件を示せ．

3 数学（確率・統計）

1. 離散型確率変数 X, Y の同時確率分布が表- 1 で与えられている．

表- 1: 離散型確率変数 X,Y の同時確率分布表

	Y=0	Y=1	Y=2	Y=3
X=1	a	a	a	a
X=2	0	a	a	0

(1) a（実数）を定めよ．

(2) X と Y の周辺確率分布を求めよ．

(3) X と Y が相関しているかを判定せよ．

(4) X と Y が独立かを判定せよ．

2. 同一の母数（平均 μ，分散 σ^2）の確率変数 X_1, X_2, X_3 に対して，下記に示す T_1, T_2, T_3 の分散の値の大小関係を示せ．(例：$T_1 > T_2 = T_3$)
なお，確率変数 X_1, X_2, X_3 は独立であるとする．

$$T_1 = X_1 + X_2 + X_3 \tag{1}$$

$$T_2 = X_1 + X_2 - X_3 \tag{2}$$

$$T_3 = 1/3 \cdot (X_1 + X_2 + X_3) \tag{3}$$

3. 母集団分布が母数 λ の指数分布に従うとき，大きさ n の無作為標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に基づく最尤推定量 $\hat{\lambda}$ と標本平均 $\bar{x}$ との関係を示せ．なお，指数分布は下式で与えられる．

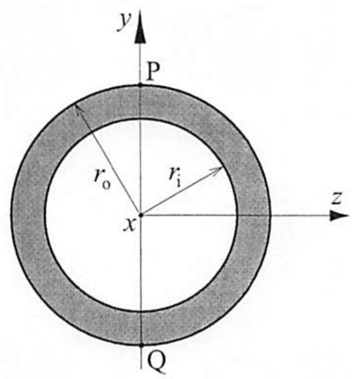
$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad (0 < x) \tag{4}$$

4 弾性体と構造の力学 (1)

下に示すような，せん断弾性係数 50 GPa の等方性・線形弾性材料からなる中空断面のはりについて以下の問いに答えなさい．なお，この断面の外径と内径はそれぞれ $r_{\mathrm{o}} = 12$ cm, $r_{\mathrm{i}} = 10$ cm とする．また，このはりの中立軸は x 軸に一致し，断面二次モーメントは次式で与えられるものとする．

$$I = \frac{\pi}{4}(r_{\mathrm{o}}^4 - r_{\mathrm{i}}^4)$$

ここで，π は円周率である．なお，解答は常分数で表せ．



(1) この断面に z 軸周りの曲げモーメント $\pi \times 10^4$ N · m が作用して，図中の点 P に x 軸方向の最大引張応力が生じた．この応力を MPa の単位で答えなさい．

(2) 上記 (1) の応力状態にある断面に，軸力（x 軸方向負荷）が作用して点 P の最大引張応力が $\dfrac{2200\pi}{I} \times 10^{-6}$ MPa に変化した．ここで，I は m^4 の単位とする．このときに作用した軸力を kN の単位で求めなさい．

(3) このはりの x 軸回りにねじりモーメント（トルク）$T = 5\pi r_{\mathrm{o}}^3(1 - n^4) \times 10^6$ N · m が作用するとき，点 P における yz 面内の最大（工学）せん断ひずみ γ_{yz} を求めなさい．なお，トルク T が x 軸回りに作用するときの yz 面内での最大せん断応力は次式で与えられる．

$$\tau_{yz} = \frac{2T}{\pi r_{\mathrm{o}}^3 (1 - n^4)}$$

ここで，$n = \dfrac{r_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{o}}}$ である．

(4) この断面内で同時に上記の問い (2), (3) の状態になるとき，図中の点 Q における応力テンソルの成分を 3×3 の行列表記で与えなさい．

(5) 上記 (4) の応力状態について，最大，中間，最小主応力を求めなさい．

5 弾性体と構造の力学 (2)

図–1~4 に示す梁はすべて同じものである．図–1 に示すように，単純梁の C 点（$x = \ell/2$）に単位の集中荷重を作用させたところ，$0 \le x \le \dfrac{\ell}{2}$ の任意点 x のたわみ $w(x)$ が

$$w(x) = w_{\mathrm{max}} \left\{ 3\,\frac{x}{\ell} - 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right\}$$

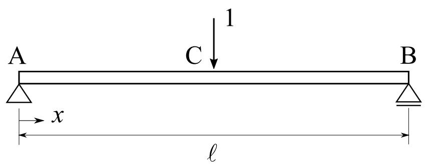
であった．ここに，w_{max} は最大たわみである．このことを用いて以下の問いに答えよ．ただし，梁の断面は軸方向に一様で，たわみは下向きを正とする．

1. 図–2 に示す単純梁の C 点のたわみ $w_{2\mathrm{C}}$ を求めよ．

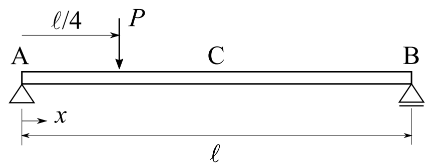
2. 図–3 に示す梁は C 点をばね定数 k のばねにより弾性支持されている．図–3 の C 点のたわみ $w_{3\mathrm{C}}$ が図–2 の C 点のたわみ $w_{2\mathrm{C}}$ の $\dfrac{1}{2}$ となるときのばね定数 k を求めよ．

3. 図–3 に示すばねの内力（圧縮を正とする）を f とする．$\dfrac{f}{P}$ を求め，$\dfrac{f}{P}$ と kw_{max} との関係を図示せよ．

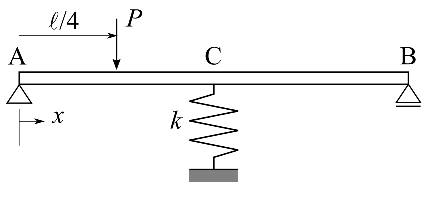
4. 梁の C 点をローラーヒンジ支点により支持した図–4 に示す梁の C 点の鉛直反力 V_{C}（上向きを正とする）を求めよ．



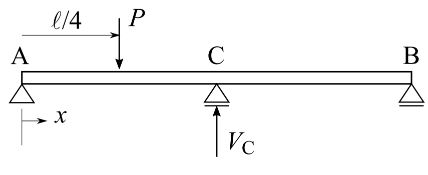
図–1



図–2



図–3



図–4

6 地盤とコンクリート (1)

1. 化学が関係する地盤工学に関わる課題を一つ挙げ，300字以内で説明せよ．

2. 地盤工学が貢献できる持続可能な開発目標（SDGs）に関わる課題の内容を説明せよ．

3. 図-1は，浸透流のある場合の飽和した半無限斜面内の応力を示している．斜面の安定性に関して，以下の問いに答えよ．なお，土の湿潤単位体積重量γ_t，土の水中単位体積重量γ_b，水の単位体積重量γ_w とする．

   (1) cd面に作用する直応力σとせん断応力 τ を求めよ．
   (2) cd面に作用する間隙水圧uと有効応力σ' を求めよ．
   (3) 斜面のすべり安全率を示す式を示せ．ここに，土はせん断強度定数として，内部摩擦角φ'，粘着力c'を持つものとする．

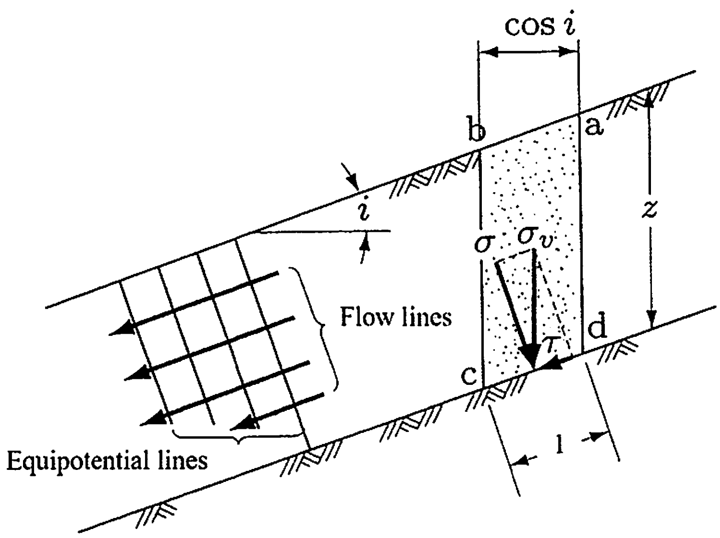


図-1　浸透流のある場合の飽和した半無限斜面内の応力

7 地盤とコンクリート (2)

1. せん断補強鉄筋の一つであるスターラップの主な役割について，次のキーワードを全て使用して説明せよ.

   キーワード：せん断力，骨材の噛み合わせ，ダウエル作用

2. 骨材がコンクリートのフレッシュ性状に及ぼす影響について，次のキーワードを全て使用して説明せよ.

   キーワード：骨材の粒形，表面水率，細骨材率，単位水量，材料分離，スランプ

3. 鉄筋コンクリート構造物の塩害に関する次の設問に答えよ.
   (1) 鉄筋コンクリート構造物が健全な状態から耐力が著しく低下するまでの劣化過程を説明せよ.
   (2) 海洋環境下で生じる塩害と積雪寒冷地で生じる塩害の違いについて説明せよ.

8 水理学 (1)

図-1 のように，静止時に半分だけ液体を入れた内側内径 a，深さ H の容器が，中心軸まわりに一定の角速度 ω で回転している．このとき液体はあふれていない．以下の問いに答えよ．重力加速度は g，液体の密度は ρ とする．なお，水面上での圧力は一定である．

1. 鉛直方向（y 方向）の力の釣り合いから，鉛直方向の圧力変化 $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ を定式化せよ．

2. 半径方向（r 方向）の力の釣り合いから，半径方向の圧力変化 $\dfrac{\partial p}{\partial r}$ を定式化せよ．

3. 圧力 p の全微分から水面形を求めよ．

4. 液体があふれない最大の角速度 ω を求めよ．

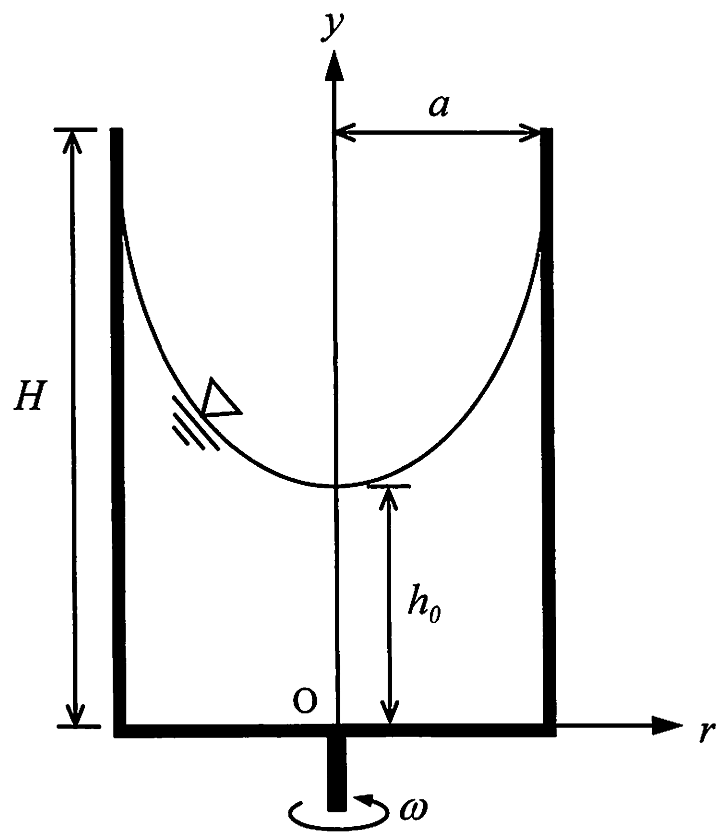


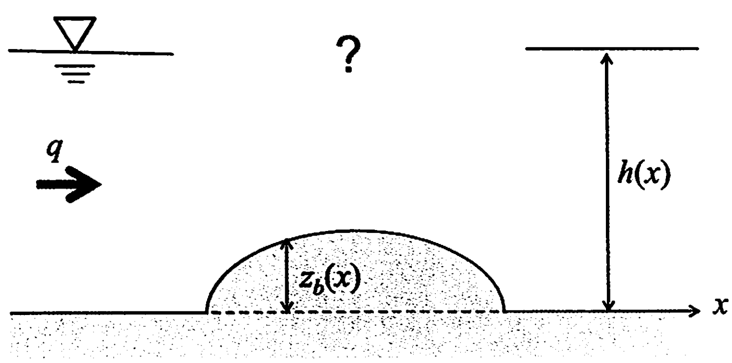
図-1 回転運動する容器

9 水理学（2）

図のように，突起のある水路床を定常状態で水が流れている．水深を $h(x)$，河床高さを $z_b(x)$，単位幅流量を q，重力加速度を g とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，摩擦損失は無視するものとする．

1. フルード数 Fr を用いて，水深変化と河床高変化の関係を定式化せよ．

2. 以下の条件における水面形について説明せよ．
   (1) 常流の場合
   (2) 射流の場合



10 水質と環境(1)

1. 生物膜法について，活性汚泥法と比較しながら，以下の事項を説明せよ.

(1) 維持管理性

(2) 生物相の構造

2. 生活排水処理施設を浄化槽で整備することが適する地域の特徴について，地域の特徴を２つ挙げて説明せよ.

3. 循環型社会づくりのために重要な事項を簡潔に説明せよ.

11 水質と環境（2）

1. 水道水源の湖沼において，溶存酸素量の低下により生じうる水道水に対する水質障害の概要について説明せよ．

2. 河川水中の有機物量と溶存酸素量の変化について考える．
   (1) 流量が1.5 m^3/s，BOD濃度が2.0 mg/lの河川がある．ある排水源から流量 1.0×10^3 m^3/d，BOD濃度が250 mg/lで排水が，この河川に流入している．このとき，排水源からのBOD負荷量（kg/d）と排水流入後の河川水のBOD濃度(mg/l)を求めよ．ただし，排水と河川水は速やかに完全混合すると考えよ．
   (2) このように放出された有機物(BOD)が，河川の自浄作用により分解される過程を考える．河川水中のBOD濃度の時間変化が一次反応式で表されるとする．このとき，BOD濃度 C を脱酸素係数 K_1 と時間 t，およびBODの初期濃度 C_0 を用いて表せ．
   (3) 河川水中の溶存酸素量は，前問で考えたような有機物の酸化分解と水表面からの再曝気により変化していると考えられる．このときの河川水中の溶存酸素量の時間変化の概略を図示せよ．またその変化について説明せよ．

12　生物と生態（1）

1．次のキーワードを説明せよ．

（1）化学合成独立栄養生物
（2）対数増殖期
（3）メタン生成古細菌
（4）赤潮
（5）温室効果ガス

2．地球規模の窒素循環におけるストックとフローを図示せよ．また，その窒素循環における二つの微生物学的反応を選んで，関連する微生物およびその代謝機能を説明せよ．

13 生物と生態（2）

1. 生態学におけるニッチェの概念に関連する以下の事項を説明せよ.
   (1) 「競争的排除」と「すみ分け」をニッチェの考え方に基づき説明せよ.
   (2) 「基本ニッチェ」と「実現ニッチェ」の違いを説明せよ.
   (3) 種が「実現ニッチェ」を持つことの，種の生存における意義を説明せよ.

2. 「遺伝子の多様性」は「種の多様性」に重要な役割を果たすとされている．その機構を説明せよ.

3. 「生態系サービス」とはどのような概念かを説明せよ．さらに，生態系サービスの具体的な例を５つ挙げよ.

14 交通工学

1．2つの一方通行の道路（道路A，道路B）が直角に交差する信号機のついた交差点を考える．各道路の車線数は，道路Aが2車線，道路Bが1車線である．この交差点の飽和交通流率は，道路A側が 3200 veh/h（2車線分の合計の値），道路B側が 1600 veh/h である．また，道路AとBの上流側からは交通流が継続的に流入する．そのときの交通流率は，道路Aにおいては常に厳密に 1200 veh/h （2車線分の合計の値）に等しく，道路Bにおいては常に厳密に 600 veh/h に等しい．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この交差点のサイクル長を C，道路Aから交差点に進入する車両への青信号の時間を G_A，道路Bから交差点に進入する車両への青信号の時間を G_B とする．1サイクルあたりのロスタイムは L である．このとき，道路A方向の青信号のスプリット g_A $(=G_A/C)$ と，道路B方向の青信号のスプリット g_B $(=G_B/C)$ の合計を示せ．

(2) $C=120$ 秒, $G_A=60$ 秒のときの，道路Aを走行する車両のこの交差点における1サイクルあたりの総遅れ時間を計算し示せ．計算の過程も簡潔に示せ．なお，交差点における交通容量は，青信号が出ているときは常に飽和交通流率に等しく，それ以外のときは常に0であるとせよ．

(3) $L=10$ 秒のときに，赤信号で2回以上停止する車両が存在しないサイクル長の最小値を計算し示せ．

2．1つの起終点の間を結ぶ2つのリンクA, Bからなる道路ネットワークを考える．リンクAのリンク交通量は x_A veh/h，リンクBのリンク交通量は x_B veh/h である．リンクAのリンク旅行時間は $t_A=10+0.01\,x_A$ (min)，リンクBのリンク旅行時間は 20 min である．起終点交通量は 2000 veh/h である．この道路ネットワークにおける総旅行時間は，$z=x_At_A+20\,x_B$ と定義される．このとき以下の問いに答えよ．計算の過程も簡潔に示せ．

(1) 均衡状態（どの利用者も自分だけが経路を変更しても自身の旅行時間をより小さくできない状態）における，リンクA，Bの交通量と総旅行時間をそれぞれ計算し示せ．

(2) システム最適状態（総旅行時間が最小となる状態）における，リンクA，Bの交通量と総旅行時間をそれぞれ計算し示せ．

15 交通計画

10,000 人の通勤者が，同一の起終点間を，地下鉄か自動車の何れかの交通機関で通勤する．この交通機関選択が，ランダム効用モデルで記述できると考えよう．すなわち，選択肢 i (i=1: 地下鉄, 2: 自動車) を選択した時に通勤者が得る効用は $U_i = V_i + \varepsilon_i$ と表現され，選択肢 i を選択する通勤者数 Q_i は

$$Q_i = 10000 \times \mathrm{Pr}.[U_i \geq U_j,\ j \neq i] = 10000 \times \mathrm{Pr}.[V_i - V_j \geq \varepsilon_j - \varepsilon_i,\ j \neq i]$$

と与えられる．ここで，V_i は選択肢 i の確定的な効用項，ε_i は確率的な誤差項である．確率的な誤差項の差 $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ の確率密度関数 $f(\varepsilon)$ は，区間 $[-L, L]$ の一様分布で与えられ，$\varepsilon_i\ (i=1,2)$ の期待値は 0 と仮定する．

(1) 地下鉄を選択する通勤者数（すなわち，地下鉄需要）Q_1 を V_1, V_2 および L の関数として表現せよ．

以下の問いでは，地下鉄と自動車の確定的効用は，各々，$V_i = 100 - T_i\ \ (i=1,2)$ で与えられ，$L = 25$，$T_2 = 20$ とする．ここで，T_i は，各交通機関 i の交通費用である．

(2) 地下鉄の交通需要 Q_1 を T_1 の関数として表現せよ．

(3) 地下鉄の交通費用が $T_1 = 40$ のときの地下鉄の交通需要 Q_1 と総交通費用 $Q_1T_1 + Q_2T_2$ を計算せよ．

(4) 地下鉄の交通費用が $T_1 = 30$ に改善されたときの地下鉄の交通需要 Q_1 と総交通費用 $Q_1T_1 + Q_2T_2$ を計算せよ．

(5) 総交通費用の変化は，地下鉄の交通費用改善による利用者便益を必ずしも適切に反映する指標ではない．この理由を説明し，交通需要（すなわち，通勤者の選択行動）がランダム効用モデルで記述できると仮定したときに利用者便益を適切に評価するための厚生指標を示せ．

16 計画数理（1）

1. 次の線形計画問題(P)を考える.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{maximize} & 3x_1 + 2x_2 \\
& \text{subject to} & x_1 + x_2 \le 7 \\
& & x_2 \le 4 \\
& & x_1 \ge 1, x_2 \ge 1
\end{array}
$$

(1) $y_i \equiv x_i - 1 \ (i = 1{,}2)$を用いて，問題(P)を y_iに関する線形計画問題(P1)に変換せよ.

(2) 問題(P1)に対する標準形(P2)を定式化せよ.

(3) 問題(P2)の実行可能な基底解を全て求めよ.

2. 次の最適化問題 (NP)を考える.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(NP)} & \text{maximize} & {x_1}^2 + x_1 x_2 \\
& \text{subject to} & x_1 + x_2 \le 7 \\
& & x_2 \le 4 \\
& & x_1 \ge 1, x_2 \ge 1
\end{array}
$$

(1) この問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を示せ.

(2) x_2を定数$(1 \le x_2 \le 4)$とみなして次の問題(NP1)を解き，$g_2(x_2)$を求めよ.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(NP1)} & g_2(x_2) \equiv \max_{x_1} {x_1}^2 + x_1 x_2 & \\
& \text{subject to} & x_1 + x_2 \le 7 \\
& & x_1 \ge 1
\end{array}
$$

(3) (2)の結果を用いて次の問題(NP2)を解き，問題(NP)の最適解を求めよ.

$$\text{(NP2)} \quad \max_{1 \le x_2 \le 4} g_2(x_2)$$

17 計画数理（2）

1. $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 上で定義されるベクトル (x,y) は時間 t をパラメータとする以下の動的過程に従う．ただし，$\dot{x}$ および $\dot{y}$ は $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ表す．

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=2y(t)-1\\ \dot{y}(t)=2x(t)-1\end{cases}$$

(1) (2)と(3)を解くため，$(\dot{x},\dot{y})$ のベクトル場を図示せよ．

(2) 動的過程の固定点（平衡点）(x^*,y^*) を求めよ．

(3) 固定点（平衡点）の安定性について論ぜよ．

2. 以下の利得行列をもつ 2 人ゲームについて考える．

1\2	A	B
A	1, 1	0, 0
B	0, 0	1, 1

(1) 純粋戦略ナッシュ均衡を求めよ．

(2) プレイヤー1 が行動 A を選択する確率を p，プレイヤー2 が行動 A を選択する確率を q で表すと，プレイヤー1 の最適反応戦略 $p^*(q)$ は以下の最適化問題の解として求められる．

$$\max_{0\le p\le 1} pq+(1-p)(1-q)$$

最適反応戦略 $p^*(q)$ を求めよ．

(3) 混合戦略ナッシュ均衡を求めよ．