

基礎科目

1 微分積分

1. 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$$

2. 次の関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

$$f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

3. 次に示す xyz 空間の領域 D を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

- (1) 領域 D を図示せよ.
(2) 領域 D の体積を求めよ.
4. 次の微分方程式を解け. ここで, e は自然対数の底である.

$$y'' + 4y' + 4y - e^{-2x} = 0$$

基礎科目

2 線形代数

1. 以下の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 以下の行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

は固有値 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ を持つ. この行列について以下の問いに答えよ.

- (1) A の正規化された固有ベクトルをすべて求めよ.
- (2) $B^2 = A$ となる行列 B を求めよ.

3. Π を以下のベクトルで張られる \mathbb{R}^3 (三次元空間) の平面とする.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) Π の正規直交基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を求めよ. ただし $\mathbf{a}_1 // \mathbf{b}_1$ とする.
- (2) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ が \mathbb{R}^3 の正規直交基底となるような \mathbf{b}_3 を求めよ.

基礎科目

3 確率統計

1. PCR 検査は, Covid-19 に実際に感染している人の 70% を検出 (「陽性」と判定) する. しかし, この検査では 健康な人の 0.1% が “偽陽性” となる (i.e., 健康な人を検査した場合, 0.001 の確率で「陽性」と判定してしまう). Covid-19 感染者の割合が 0.05% の集団において, 検査結果が「陽性」となった人が実際に感染している確率を求めよ.
2. 確率変数 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を考える. 各変数 X_i の期待値は $E(X_i) = \mu$, 分散は $Var(X_i) \equiv E[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2$ である.

(1) 各変数ペア (X_i, X_j) の共分散が

$$Cov(X_i, X_j) \equiv E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] = 0.2\sigma^2 \quad \text{for all } (i, j), i \neq j$$

で与えられる. このとき確率変数 $\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の分散を求めよ.

(2) X_i ($i = 1, 2, 3$) の分散・共分散行列が

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & 1 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

と与えられる. このとき確率変数 $Y \equiv 0.4X_1 + 0.1X_2 + 0.4X_3$ の分散を求めよ.

3. 平均 μ と標準偏差 σ が未知の正規分布に従う母集団から抽出したサイズ n のランダム標本 X_1, X_2, \dots, X_n を考える.

(1) 標準正規分布 (平均 0, 標準偏差 1 の正規分布) に従う確率変数 Z の確率密度関数 h は次式で与えられる:

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

確率変数 $Y \equiv e^Z$ の確率密度関数を示せ.

(2) 確率変数 $X \equiv \sigma Z + \mu$ の確率密度関数を示せ.

(3) X_1, X_2, \dots, X_n から未知パラメータ (μ と σ) を推計するための対数尤度関数 $L(\mu, \sigma)$ を示せ.

(4) 平均 μ の最尤推定量を求めよ.

(5) 分散 σ^2 の最尤推定量を求めよ.

基礎科目

4 生物・生態学

1. 酵素反応に関する以下の問いに答えよ。

(1) 基質濃度を[S], 反応速度を v , 最大反応速度を V_{\max} , ミカエリス・メンテン定数を K_m としてミカエリス・メンテン式を書け。

(2) ある酵素反応について実験を行い, ラインウィーバー・バークプロットを行って図1を得た. この酵素反応のミカエリス・メンテン定数 K_m と最大反応速度 V_{\max} を求めよ。

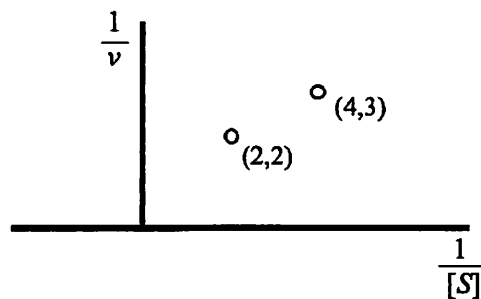


図1

(3) 酵素反応の性質である基質特異性および至適温度について, それぞれ簡潔に説明せよ。

2. 自然界における窒素循環について, その主な過程を5つ挙げて説明せよ。