

基礎科目

1 微分積分

1. 次の級数が収束するか、発散するかを判定せよ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

2. 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ において微分可能であるか否かを調べよ. ここで, e は自然対数の底である.

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

3. 次の重積分について, 以下の問いに答えよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- (1) 積分領域 D を図示せよ.
(2) この重積分を計算せよ.
4. 次の初期値問題を解け.

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

基礎科目

2 線形代数

1. 行列 A , ベクトル x, b に関する以下の問いに答えよ. ここに,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり, x_i ($i = 1, \dots, 4$) および c は実数である.

- (1) $\text{rank } A$ を求めよ.
- (2) A の行列式を求めよ.
- (3) 連立方程式 $Ax = b$ が解を持たないときの c を求めよ.

2. 次の 2 次形式について以下の問いに答えよ.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{16} (13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 + 16z^2)$$

- (1) $f(x, y, z)$ の標準形を求めよ.
- (2) $f(x, y, 0) = 1$ の概形を描け.

基礎科目

3 確率統計

- 飛行機のエンジンは、各エンジンごとに独立に $1-p$ の確率で飛行中に故障する。また、飛行機は、半分以上の個数のエンジンが稼動していれば、墜落しないものとする。
 - 2 個のエンジンを搭載した飛行機が墜落しない確率を求めよ。
 - 4 個のエンジンを搭載した飛行機が 2 個のエンジンを搭載した飛行機よりも安全であるのは、 p がどのような値の場合か？
- 確率変数 X と Y の相関係数に関する以下の問いに答えよ。
 - 相関係数 R の定義を示せ。
 - X と Y が独立なら $R=0$ であることを証明せよ。
 - 任意の確率変数 X と Y に対して $-1 \leq R \leq 1$ であることを証明せよ。
- ある電池の寿命は平均 80 時間、標準偏差 50 時間の確率分布に従う。この電池 100 個を順番に寿命が切れるまで使い（各電池の寿命は独立な確率変数であるとして）、9000 時間以上使用できる確率の近似値を求めよ。ただし、標準正規分布に従う変数 Z の累積確率は以下の通りである：
$$P(Z > 0.5) = 0.3085, P(Z > 1) = 0.1587, P(Z > 1.5) = 0.0668, P(Z > 2) = 0.0228.$$
- 未知パラメータ p の Bernoulli 分布 (i.e., 確率 p で値 1, 確率 $1-p$ で値 0 をとる確率変数の確率分布) に従う母集団から抽出したサイズ n のランダム標本 X_1, X_2, \dots, X_n を考える。
 - X_1, X_2, \dots, X_n から p を推計するための対数尤度関数 $L(p)$ を示せ。
 - パラメータ p の最尤推定量を求めよ。

基礎科目

4 生物・生態学

1. DNA も RNA もともに核酸とよばれるが，両者の間には違いが見られる．この違いを簡潔に説明せよ．

2. 次の生物・生態学の用語・モデルに関する事項を説明せよ．
 - (1) レジリエンス (resilience) と レジームシフト (regime shifts) の関係
 - (2) ロジスティック方程式 (logistic equation) における係数の生態学的意味
 - (3) 細胞内共生説 (endosymbiotic theory) とその根拠

3. 水界生態系における総一次生産量を測定する方法である明暗瓶法について，測定原理を説明せよ．