基礎科目

$\boxed{1}$ 微分積分

1. 次のように x, y が変数 t の関数として与えられるとき，x, y を用いて $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を表せ．

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

2. 以下の問いに答えよ．

（1）次に示す関数 $f(t)$ および $g(t)$ を $t=0$ のまわりでそれぞれテイラー展開せよ．

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t$$

（2）次に示す 2 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ と単位行列 $\boldsymbol{E}$ を考える．n をゼロ以上の整数とし，n, t, $\boldsymbol{E}$ を用いて $\boldsymbol{A}^2$ および $\boldsymbol{A}^{2n}$ を表せ．なお，$\boldsymbol{A}^0$ は $\boldsymbol{E}$ と定義される．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）行列 $\boldsymbol{A}$ の指数関数 $\exp \boldsymbol{A}$ は次のように定義される．$\sin t$ と $\cos t$ を用いて $\exp \boldsymbol{A}$ のすべての成分を表せ．

$$\exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots$$

3. 次の重積分について，以下の問いに答えよ．

$$I = \iint_D x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\right\}$$

（1）積分領域 D を図示せよ．

（2）重積分 I を計算せよ．

基礎科目

2 線形代数

1. ベクトル $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ に関する以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を, $\boldsymbol{a}$ を通る直線へ射影せよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ を通る直線への射影行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

2. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ とする下三角行列 $\boldsymbol{L}$ と上三角行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ. ただし, 下三角行列 $\boldsymbol{L}$ の対角成分は 1 とする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

3. 行列 $\boldsymbol{B}$ に関する以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{B}^2$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\boldsymbol{B}^\infty$ を求めよ.

基礎科目

$\boxed{3}$ 確率統計

1. ある 1 つのサイコロを 1 回投げる試行を行う．事象を $A_1 = \{$ 出る目は 3 以下である $\}$，$A_2 = \{$ 出る目は 4 以上である $\}$，$B_1 = \{$ 出る目は素数である $\}$，$B_2 = \{$ 出る目は素数ではない $\}$ と定義する時，2 つの事象族 $F_A = \{A_1, A_2\}$ と $F_B = \{B_1, B_2\}$ が独立か否かを判定せよ．

2. 連続確率変数 X，Y がそれぞれ x，y をとる時の同時確率密度関数が下式で与えられている．

$$f(x,y) = \frac{-x^2 - y^2 + 4}{a} \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1)$$

   (1) 上式が確率の性質を満たすように実数 a を求めよ．

   (2) 確率 $P(0 < X < 1, -1 < Y < 1)$ を求めよ．

3. ある駅の列車の到着間隔 T は，互いに独立で平均 t_m の指数分布に従うことが知られている．

   (1) 直前の列車が到着してからの経過時間を t_c とする時，t_c までに次の列車が到着しない確率 $P(T > t_c)$ を t_c と t_m の関数として示せ．

   (2) ある人が列車の到着とは無関係に駅に来る状況を考える．直前の列車が到着してからの経過時間が t_c の時点でこの人が駅に来る時，次の列車が到着するまでの待ち時間 W が従う条件付き確率密度関数を示せ．

なお，ある連続確率変数 Z が z をとる時の指数分布の確率密度関数は下式で与えられる．

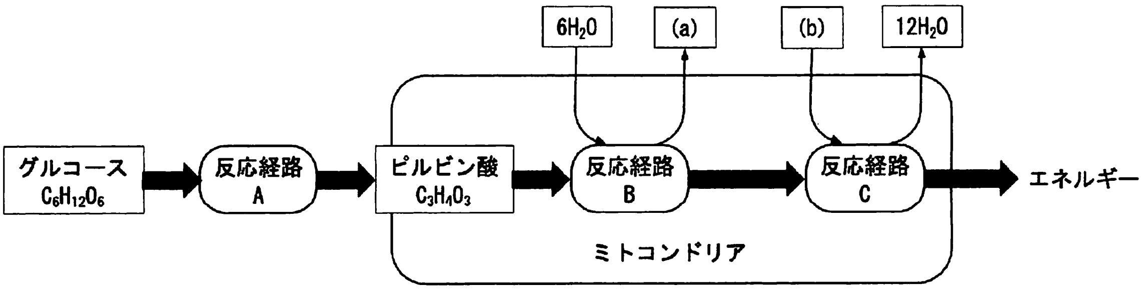
$$f(z) = \lambda \exp(-\lambda z)$$

ここで，λ は指数分布のパラメータ $(\lambda > 0)$ である．

基礎科目

4　生物・生態学

1. 図に呼吸の過程を模式的に示した．呼吸の仕組みに関する次の問に答えよ．



(1)　図中の反応経路 A とは何か．それは細胞内のどこで行われているか．

(2)　図中の反応経路 B とは何か．また物質(a)は何か．

(3)　図中の反応経路 C とは何か．また物質(b)は何か．

(4)　反応経路 A, B, C のそれぞれの経路で，１分子のグルコースから何分子の ATP が生成するか．なお，反応経路 C では最大の値を答えよ．

2. 生物の個体数の変化の様子を表す数理モデルの一種であるロジスティック方程式に関する次の問に答えよ．

$$\frac{dN}{dt} = \gamma\left(\frac{K-N}{K}\right)N$$

この式で t は時間であり，N は個体数，γ は内的自然増殖率，K は環境収容力である．

(1) ロジスティック方程式の一般解を求めよ．ただし，$t=0$ では $N=N_0$ とする．

(2) ロジスティック増殖で個体数はどのように変化するか．横軸に時間，縦軸に個体数をとり，概形を描け．ただし，$\gamma>0$ とし，$t=0$ では $N=0.1K$ とする．

(3) もし密度効果を無視できる場合，個体数はどのように変化するか．(2)の図に概形を描き加えよ．

3. 植物が陸上へ進出可能となった環境の変化の過程を以下の用語を用いて説明せよ．

用語：シアノバクテリア，光合成，紫外線，オゾン