基礎科目

1 微分積分

1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1)

$$(\sin x)^{\cos x}$$

(2)

$$e^{\arctan x} \quad ここで \quad \arctan x = \tan^{-1} x$$

2. 次の定積分の値を求めよ.

(1)

$$\int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$$

(2)

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx$$

3. 曲線 C を $r = f(\theta)$, $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と極座標表示する.

(1) C の長さが以下の式で与えられることを示せ.

$$l(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2} d\theta$$

(2) $l(C)$ を用いて次の曲線の長さを求めよ.

$$r = e^{-a\theta} \quad ここで \quad 0 \leq \theta < \infty \quad と \quad a > 0$$

基礎科目

2 線形代数

1. 次に示す 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，および $\boldsymbol{p}$ を考える．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) 基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ によって定められる座標系におけるベクトル $\boldsymbol{p}$ の座標を求めよ．

2. 次に示す連立 1 次方程式の解空間の次元および基底を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3. 次に示す行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値を求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ により行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化するような行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(4) 次の連立微分方程式を考える．

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad ここで，\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$$

y_1 および y_2 は変数 t の関数である．$\dot{y}_1, \dot{y}_2$ はそれぞれ y_1, y_2 の t に関する 1 階導関数を表す．z_1 および z_2 を t の関数とし，$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ とおくことにより，上に示した連立微分方程式を解け．

基礎科目

$\boxed{3}$ 確率統計

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 確率変数 X が区間 [0,1] 上の一様分布に従うとき，確率変数 $Y = ln\,X$ の確率密度関数を求めよ.

(2) 確率変数 X と Y が独立で，各々，区間 [-1/2, 1/2] 上の一様分布と区間 [0,1] 上の一様分布に従うとき，$P(X < Y)$ を求めよ.

2. 確率変数 X と Y が独立に標準正規分布 $\mathbf{N}(0,1)$ に従うとき，以下の様に定義される新たな確率変数 (U, V) を考える：

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) (X, Y) の同時確率密度関数 $f(x, y)$ を示せ.

(2) (U, V) の共分散 $Cov(U, V)$, および，相関係数 $R(U, V)$ を求めよ.

(3) (U, V) の同時確率密度関数 $g(u, v)$ を求めよ.

3. 二種類の結果 1 か 0 が各々確率 p と $1-p$ で生起するベルヌイ試行を繰り返し，1 が初めて現れるまでに必要な試行回数を表す確率変数を X とおく．X と同じ確率分布に従う母集団から抽出したサイズ n のランダム標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を考える.

(1) X の平均を（p の関数として）求めよ.

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ からパラメータ p を推計するための対数尤度関数 $L(p)$ を示せ.

(3) パラメータ p の最尤推定量を求めよ.

基礎科目

4 生物・生態学

1. 微生物が行う好気呼吸と嫌気呼吸の機序について，以下のキーワードを用いてそれぞれ説明せよ．なお，キーワードは何度用いても良いものとする．

   電子伝達，酸素，硫酸塩，ATP

2. 薬剤耐性細菌による感染症が世界中で問題となっている．細菌が薬剤耐性を獲得する際の遺伝子水平伝播機構の名前を３つ挙げ，それぞれの機序を説明せよ．