基礎科目

1 微分積分

1. a と b を正の定数として積分 I を求めよ.
   必要なら, $\int \sin^4\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{32}(12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta))$ を用いてよい.

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

$$f(x,y) = \frac{y^4}{b^4(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} + xy^2$$

2. 球状の雨粒の半径 $r(t)$ の変化率は次の式で表される, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = k/\rho$. ここで $k < 0$ は比例定数, ρ は水の密度である. $t = 0$ のとき, 半径は r_0 であり, 雨粒の落下速度 v について記述される運動方程式は次式で表される.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{3(k/\rho)}{(k/\rho)t + r_0}v = g$$

   g は重力加速度の大きさである. 縦軸は下向きに正であり, k, ρ, g は一定であると考える.
   以下の問いに答えよ.
   (1) $r(t)$ の方程式を求めよ.
   (2) $r(0) = 0.01$ cm と $r(10) = 0.007$ cm であると, 雨粒はいつ完全に蒸発するかを答えよ. (t の単位は秒である.)
   (3) $v(0) = 0$ のとき, $v(t)$ を求めよ.

3. 変数変換 $2x + 1 = e^t$ を用いて, 次の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

$$(2x+1)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2(2x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0$$

基礎科目

2 線形代数

1. 次に示す 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$，および 3 次正方行列 A を考える．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体 V の体積を求めよ．

(2) 行列 A を表現行列とする 3 次元空間の線形変換 f_A によって，平行六面体 V が平行六面体 $f_A(V)$ にうつるとする．このとき，平行六面体 $f_A(V)$ の体積を求めよ．

2. 次に示す 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，および $\boldsymbol{p}$ を考える．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 3 つのベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は 1 次独立であるか，1 次従属であるかを示せ．その根拠も示すこと．

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ の 1 次結合として表すとき，その表し方をすべて求めよ．

3. 線形変換 $f_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ について，以下の問いに答えよ．ここで，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

(1) 線形変換 f_B の像 $\mathrm{Im}\, f_B$ の基底を求めよ．

(2) 線形変換 f_B の核 $\mathrm{Ker}\, f_B$ の基底を求めよ．

基礎科目

3 確率統計

1. 二種類の結果「勝ち」か「負け」が，各々確率 p と $1-p$ で生起するベルヌイ試行 (Bernoulli trial) を繰り返し，「勝ち」が初めて現れるまでに必要な試行回数を表す確率変数を X とおく．

   (1) $X=k$ となる確率 $P(X=k)$ ，および，X の平均を求めよ．

   (2) X の累積分布関数 $P(X \le k)$ を示し，この分布と指数分布の関係を説明せよ．

2. 確率変数 X と Y が独立に区間 [-1,1] 上の一様分布 $\mathbf{U}(-1,1)$ に従うとき，以下の様に定義される新たな確率変数 (U, V) を考える：

$$U = (1/\sqrt{2})(X - Y), \quad V = (1/\sqrt{2})(X + Y)$$

   (1) (X, Y) の同時確率密度関数 $f(x, y)$ を示せ．

   (2) U の平均 $E(U)$ と分散 $Var(U)$ を求めよ．

   (3) U と V の共分散 $Cov(U, V)$, および，相関係数 $R(U, V)$ を求めよ．

   (4) (U, V) の同時確率密度関数 $g(u, v)$ を求め，U と V の独立性を判定せよ．

3. 以下の確率密度関数：

$$f(x) = \begin{cases} C\, e^{-\lambda x} & if\ x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

   を持つ分布に従う母集団から抽出したサイズ n のランダム標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を考える．

   (1) 関数 $f(x)$ が確率密度関数の基本特性を満たすように実数 C を求めよ．

   (2) この確率分布の平均と分散を（λ の関数として）求めよ．

   (3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ からパラメータ λ を推計するための対数尤度関数 $L(\lambda)$ を示せ．

   (4) パラメータ λ の最尤推定量を求めよ．

基礎科目

4 生物・生態学

1. 生物の代謝に関する次の文章の空白の四角(a から j)に適切な語句あるいは式を入れて完成せよ.

 (1) 酵素は互いに交差するさまざまな a (分子を分解してエネルギーを取り出す) や b (エネルギーを消費して分子を構築する) の代謝経路の反応を c する.

 (2) 生物学的過程での自由エネルギー変化 (ΔG) は d (ΔH) と e (ΔS), および絶対温度 Tを用いて式 f と表される.

 (3) ATP は細胞の中のエネルギー交換体である. 末端のリン酸基の加水分解によって, g と h が生じ, そして i が放出される. エネルギー共役の過程では, 発エルゴン過程である ATP の加水分解によって吸エルゴン反応が駆動される. その過程では特定の反応物にリン酸基が転移され, 活性化された j が形成され, その結果, 吸エルゴン反応が起こる.

2. 生物多様性に関する次の問に答えよ.

 (1) 生物多様性の階層とは何か. 3つ挙げて, それぞれを簡潔に説明せよ.

 (2) 生物多様性の危機とは何か. 4つ挙げて, それぞれを簡潔に説明せよ.

 (3) Satoyama イニシアティブとは何か. 保護地域を設定して原生的な自然を保護する取組と比較しながら説明せよ.