

基礎科目

1 微分積分

1. $x = 0, n = 2025$ のとき次の導関数の値を求めよ.

$$\frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 + x) \cos x\} \quad (n \geq 3)$$

その際, 以下に示すライプニッツの公式を用いよ.

関数 f, g が開区間 I で n 階微分可能ならば, 積 fg も I で n 階微分可能であり,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (fg) &= (fg)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \cdots + \binom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + f g^{(n)} \end{aligned}$$

が成立する.

2. 以下の極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\ln(x)}{n \ln(n)} dx$$

3. 以下の微分方程式を解け.

$$-3y' + y'' + 2y - e^{2x} \sin x = 0$$

基礎科目

2 線形代数

1. 次を示す連立 1 次方程式について以下の問に答えよ. ただし, p はある実数である.

$$\begin{cases} x + py + 2z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \\ 2x + y + pz = -1 \end{cases}$$

- (1) この連立 1 次方程式がただひとつの解をもつための実数 p に関する条件を求めよ.
- (2) 実数 p が (1) で求めた条件を満たすとき, この連立 1 次方程式の解を p を用いて表せ.
- (3) この連立 1 次方程式の解が存在しないための実数 p に関する条件を求めよ.

2. 次を示す 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W について以下の問に答えよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x - y - z + w = 0, x - y + z + w = 0 \right\}$$

- (1) 部分空間 W の正規直交基底をひとつ求めよ.
- (2) 部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底をひとつ求めよ.

3. 次を示す行列 A について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A のすべての固有値を求めよ.
- (2) 行列 A の各固有値に対する固有ベクトルおよび固有空間の次元を求めよ.
- (3) 行列 A が対角化可能であるか否かを示せ. その根拠も示すこと. 対角化可能である場合は対角化せよ.

基礎科目

3 確率統計

1. A, B, C の 3 人がこの順に 1 人ずつコイントスを行う. 各コイントスの結果は, 表および裏が出る確率がそれぞれ $1/2$ である独立なベルヌーイ試行に従うとする. 表が出た時点でその人の勝ちとし, それ以降はコイントスは行われらないものとする. また, 全員が裏だった場合は, 再び A から同様の規則で表が出るまでコイントスを繰り返す. このとき, A, B, C が勝つ確率をそれぞれ求めよ.

2. 母数 λ をもつ指数分布の確率密度関数は

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

で与えられ, 指数分布の台は $[0, \infty)$ である.

- (1) 指数分布に従う確率変数 X が, 任意の $u \geq 0, x \geq 0$ に対して, 無記憶性 $P(X > u + x \mid X > u) = P(X > x)$ をもつことを示せ. なお, $P(\cdot)$ および $P(\cdot \mid \cdot)$ は, 確率および条件付き確率を表す.
- (2) 確率変数 X_1, X_2 が独立で, いずれも同一の母数 λ をもつ指数分布に従うとする. $S = X_1 + X_2$ の確率密度関数を求めた上で, S が無記憶性をもつか否かを確かめよ.

3. 母数 λ をもつポアソン分布に従う母集団を考える. この母集団からそれぞれ独立に無作為抽出された n 個の標本値を $x_1, x_2, \dots, x_n$ とする. なお, 母数 λ をもつポアソン分布の確率質量関数は

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

で与えられ, ポアソン分布の台は $\{0, 1, 2, \dots\}$ である.

- (1) 母数 λ の最尤推定量を求めよ.
- (2) (1) で求めた最尤推定量が不偏推定量であることを示せ.

基礎科目

4 生物・生態学

1. 生物の分類や代謝に関連する以下の問いに答えよ.
 - (1) 現生の生物を分ける 3 つのドメインを挙げよ.
 - (2) 原核細胞と真核細胞の構造に関して, DNA の存在形態の差異を説明せよ.
 - (3) 原核生物がとりうる 4 つの栄養様式を挙げ, それぞれのエネルギー源と炭素源を説明せよ.
 - (4) グルコースを基質とした細胞呼吸におけるクエン酸回路の位置づけを説明せよ.

2. 生物多様性に関連する以下の問いに答えよ.
 - (1) 生物多様性の概念における 3 つの階層を挙げよ.
 - (2) 生物種の保全において遺伝的多様性を高く保つことが重要である理由を, 2 つ以上の生物学・生態学的視点を交えながら説明せよ.